FAT-110

اصلِ کم‌ترین‌کنش و معادله‌مسیر: مرور

امیرحسینِ فتح‌اللهی

ahfatol@gmail.com

چکیده: اصلِ کم‌ترین‌کنش (یا موپِرتوئی) و کاربردِ آن در به دست آوردنِ معادله‌مسیر مرور می‌شود.

کنش با عبارتِ زیر تعریف می‌شود:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L[q_i(t), \dot{q}_i(t); t] \ \mathrm{d}t, \tag{1}$$

که در آن $L[q_i(t), \dot{q}_i(t); t]$ لاگرانژیِ سیستم به عنوانِ تابعی از مختصاتِ تعمیم‌یافته‌ی q_i، مشتقاتِ آن‌ها، و t است. بنا بر اصلِ همیلتون[1] [1]، حرکتِ سیستم بینِ t_1 و t_2 در فضایِ q_i-t رویِ مسیری است که مقدارِ کنش رویِ آن مسیر ایستا[2] باشد. منظور از " ایستا " ئیِ مقدار این است که به ازایِ یک تغییرِ کوچک حولِ مسیرِ واقعی، تا مرتبه‌ی 1 در پارامترِ تغییر، مقدارِ کنش عوض نمی‌شود. همان‌طور که می‌دانیم، این اصل را به ازایِ وردش‌هایِ

$$\delta q_i(t) = q'_i(t) - q_i(t), \tag{2}$$

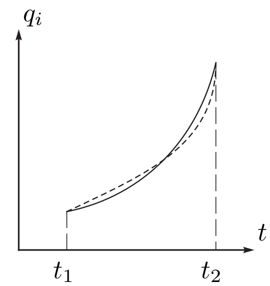
از مسیر که سروتهِ مشترک دارند، یعنی:

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \tag{3}$$

به این شکل می‌نویسند:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L[q_i(t), \dot{q}_i(t); t] \ \mathrm{d}t = 0. \tag{4}$$

وردش‌های ِ با سروته ِ مشترک با مسیر ِ واقعی را ممکن است مانند آن چه در شکل ِ 1 رسم شده تصور کرد؛ مسیر ِ خط‌چین وردش حول ِ مسیر ِ واقعی با خطّ ِ ممتد است.



شکل ِ 1

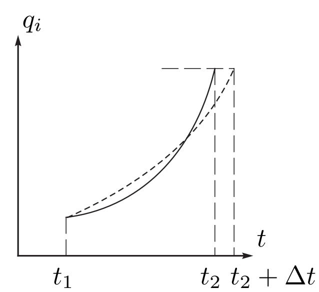
همان‌طور که می‌دانیم با استفاده از اصل ِ همیلتون می‌توان معادله‌ی حرکت را، که به معادله‌ی اویلر—لاگرانژ معروف است، به دست آورد، که هست:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{5}$$

با حلّ ِ معادله‌ی بالا می‌توان مقدار ِ $q_i(t)$ ها را به عنوان ِ تابعی از t به دست آورد.

برای سیستم‌هائی که دارای ِ همیلتونی ِ پایسته هستند، نوع ِ دیگری از اصل ِ وردشی می‌توان ارائه کرد که بر اساس ِ آن می‌توان معادله‌مسیر را به دست آورد. منظور از مسیر خمی است که سیستم در فضای ِ q_i ها، بدون ِ ارجاع به پارامتر ِ t، با تحول ِ خودش رسم می‌کند. یک مثال ِ ساده از مسیر در فضای ِ سه بُعدی شکلی است که پس از عبور ِ یک هواپیما به وسیله‌ی دود ِ آن برجا گذاشته می‌شود. در حالی که خم ِ حاصل از دود مسیر ِ هواپیما را در آسمان نشان می‌دهد، با دیدن ِ این خم نمی‌توان در مورد ِ این که هواپیما در هر لحظه کجا بوده، و یا چه سرعتی داشته، اطلاعی به دست آورد. مثال ِ ساده‌ی دیگر از مسیر خمی است که در اثر ِ حرکت ِ نوک ِ مداد روی ِ صفحه‌ی کاغذ باقی می‌ماند. در حالت ِ کلّی مسیر یک خم در فضائی است که بُعد ِ آن به تعداد ِ درجات ِ

آزادیِ سیستم است. ار آن جا که در معادله‌مسیر اطلاعات مربوط به زمان حذف می‌شود، در وردشِ جدیدی که در نظر می‌گیریم اجازه می‌دهیم که سیستم در زمانِ دل‌خواه به پیکربندیِ (هیأتِ) نهائیِ خود برسد، مثلاً در زمانِ $t_2 + \Delta t$. توجه داریم که اولاً ، Δt لزوماً مثبت نیست، و ثانیاً ، همان‌طور که بعداً خواهیم دید این تغییر لزومی ندارد فقط برایِ t_2 در نظر گرفته شود. ممکن است این وردش را با آن چه در شکلِ 2 رسم شده است نمایش دهیم.



شکلِ 2

تغییری که در q_i ها حاصل می‌شود را، که در این جا با $\Delta q_i(t)$ نشان می‌دهیم، می‌توانیم با آن چه در موردِ قبلی داشتیم مقایسه کنیم. در این جا تعریف می‌کنیم:

$$\Delta q_i(t) = q'_i(t') - q_i(t), \tag{6}$$

که در آن $t' = t + \Delta t$. همان‌طور که شکل هم نشان می‌دهد، داریم:

$$\Delta q_i(t_2) = 0, \tag{7}$$

اگر چه $\delta q_i(t_2) \neq 0$. صفر شدنِ وردشِ جدید در انتها به این معنی است که سیستم هم رویِ مسیرِ واقعی و هم رویِ مسیرِ وردش‌یافته به یک پیکربندیِ نهائی می‌رسد، اگر چه در زمان‌هایِ مختلف. حالِ بیائیم و تغییرِ کنش را با این وردشِ جدید حساب کنیم. داریم:

$$\Delta S \;\; = \;\; \int_{t_1}^{t_2+\Delta t} L[q'_i(t'), \dot{q}'_i(t'); t'] \; \mathrm{d}t' - \int_{t_1}^{t_2} L[q_i(t), \dot{q}_i(t); t] \; \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2+\Delta t} L[q_i'(t), \dot{q}_i'(t); t]\ \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L[q_i(t), \dot{q}_i(t); t]\ \mathrm{d}t, \qquad (8)$$

که در دوّمین خط نامِ متغیّرِ انتگرال‌گیری ـِ t' را به t برگرداندیم. حال همه چیز را در مرتبه‌ی 1 از وردش ـِ Δ می‌خواهیم حساب کنیم. در انتگرال ـِ اول تفکیک ـِ زیر را انجام می‌دهیم:

$$\int_{t_1}^{t_2+\Delta t} = \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_2+\Delta t}. \qquad (9)$$

در این صورت تا مرتبه‌ی 1 داریم:

$$\Delta S = \Delta t\ L(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \Big(L[q_i'(t), \dot{q}_i'(t); t] - L[q_i(t), \dot{q}_i(t); t]\Big)\ \mathrm{d}t, \qquad (10)$$

برای ـِ حساب کردن ـِ تغییرات در انتگرال ـِ دوم به تفاوت ـِ $q_i'(t)$ و $q_i(t)$، یعنی با توجه به (2)، $\delta q_i(t)$، نیاز داریم. می‌شود:

$$\delta q_i(t) = q_i'(t) - q_i(t) = q_i'(t' - \Delta t) - q_i(t) = \Delta q_i(t) - \dot{q}_i \Delta t. \qquad (11)$$

با این جاگذاری داریم:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta t\ L(t_2) + \Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ (\Delta q_i(t) - \dot{q}_i \Delta t)\Big]\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\Big)\ (\Delta q_i(t) - \dot{q}_i \Delta t)\ \mathrm{d}t, \end{aligned} \qquad (12)$$

که در آن یک بار قاعده‌ی جزءبه‌جزء را هم به کار برده‌ایم. در بالا و جاهای ـِ دیگر روی ـِ شاخص‌های ـِ تکراری مانند i جمع وجود دارد. خطّ ـِ دوّم با معادله‌ی حرکت حذف می‌شود. در گذاشتن ـِ حدود در خطّ ـِ اول، t_1 سهمی نمی‌دهد، چون در ابتدای ـِ مسیر هیچ نوع وردشی نداشتیم:

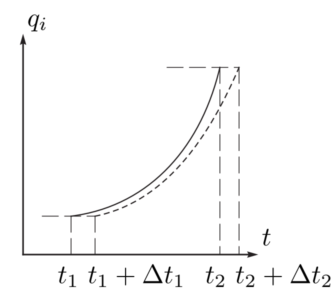
$$\delta q_i(t_1) = \Delta q_i(t_1) = \Delta t\Big|_{t=t_1} = 0. \qquad (13)$$

با استفاده از $\Delta q_i(t_2) = 0$، و این که $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ داریم:

$$\Delta S = \Delta t\ \Big(L - p_i \dot{q}_i\Big)\Big|_{t=t_2} = -\ \Delta t\ H(t_2) \tag{14}$$

که در آن H همیلتونیِ سیستم است.

می‌توان حالتِ عمومی‌تری را در نظر گرفت که در آن سیستم در شروعِ حرکت هم مانندِ پایانِ آن بتواند زمانِ متفاوت از t_1 را انتخاب کند. این وضعیّت در شکلِ 3 آمده است، که در آن تغییرِ شروع با Δt_1 و تغییرِ پایان با Δt_2 آمده است.



شکلِ 3

به طورِ معادل، در این جا هم مانندِ قبل فرض کرده‌ایم که سیستم رویِ مسیرِ وردش‌یافته در زمانِ t'، به جایِ t، به وضعیتِ یک‌سان با مسیرِ واقعی برسد، که این بار داریم:

$$t' = t + \Delta t(t), \qquad \Delta t(t_1) = \Delta t_1, \qquad \Delta t(t_2) = \Delta t_2. \tag{15}$$

باز هم داریم $\Delta q_i(t_1) = \Delta q_i(t_2) = 0$، که یعنی پیکربندیِ اولیه و نهائی، رویِ مسیرِ وردش‌یافته و واقعی یکی هستند. در این صورت به ساده‌گی به دست می‌آید که:

$$\Delta S = -\ \Big[\Delta t\ H\Big]\Big|_{t_1}^{t_2} = -\ \Big[\Delta t_2\ H(t_2) - \Delta t_1\ H(t_1)\Big]. \tag{16}$$

در این جا می‌توانیم اصلِ وردشیِ خود را به دست آوریم. ابتدا یادآور می‌شویم:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\ \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \Big(p_i \dot{q}_i - H\Big)\ \mathrm{d}t, \tag{17}$$

که با آن داریم:

$$\Delta S = \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i \ \mathrm{d}t - \Delta \int_{t_1}^{t_2} H \ \mathrm{d}t. \qquad (18)$$

حال سیستمی را درنظر بگیرید که در آن H پایسته است. می‌دانیم این وقتی اتفاق می‌افتد که L، و به تبع ِ آن H، تابع ِ صریح از t نباشند. در این صورت H از انتگرال بیرون می آید. به علاوه فرض کنید که از میان ِ تمام ِ وردش‌های ِ نوع ِ Δ آن‌هائی را درنظر بگیریم که H روی ِ آن‌ها هم پایسته و همان مقدار ِ روی ِ مسیر ِ واقعی باشد. در این صورت داریم:

$$\Delta S = \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i \ \mathrm{d}t - H \ \Big(\Delta t_2 - \Delta t_1\Big). \qquad (19)$$

با مقایسه‌ی این رابطه با وضعیت مشابه‌اش در (16) داریم:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \ \dot{q}_i \ \mathrm{d}t = 0, \qquad (20)$$

که ممکن است این گونه نوشته شود:

$$\Delta \int_{q_{\,(1)}}^{q_{\,(2)}} p_i \, \mathrm{d}q_i = 0, \qquad (21)$$

که در آن $q_{\,(1)}$ و $q_{\,(2)}$ به ترتیب پیکربندی‌های ِ اولیه و نهائی ِ سیستم هستند. همان طور که دیده می‌شود در تساوی ِ آخر اثری از t باقی نمانده است. این نتیجه‌ی این است که در این نوع از وردش، با آزادسازی ِ زمان‌هائی ِ که سیستم به یک پیکربندی می‌تواند برسد، اجازه داده‌ایم تا سیستم با سرعت ِ دل‌خواه مسیر را طی کند، که باعث می‌شود تنها اطلاعات ِ مربوط به شکل ِ معادله‌مسیر، و نه سرعت ِ پیموده‌شدن ِ آن، باقی بماند. به عبارت ِ

$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} p_i \ \dot{q}_i \ \mathrm{d}t, \qquad (22)$$

معمولاً "کنش ِ مختصرشده "[3] می‌گویند. در این صورت اصل ِ وردشی ِ جدید را به شکل ِ زیر هم می‌توان نوشت:

$$\Delta S_0 = 0. \tag{23}$$

به این اصل ِ وردشی، " اصل ِ کم‌ترین‌کنش "، یا " اصل ِ موپِرتوئی "[4] می‌گویند، که تا جائی که می‌دانیم به شکل ِ ام‌روزی‌اش را مدیون ِ اویلر و لاگرانژ هستیم.

حال به کاربردهای ِ این اصل بپردازیم. فرض کنید لاگرانژی ِ سیستم به شکل ِ زیر باشد:

$$L = \frac{1}{2}\, g_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q), \tag{24}$$

که در آن g_{ij} یک ماتریس ِ متقارن است. فرض می‌کنیم g_{ij} و V تابع ِ $\dot{q}$ ها و t نیست‌اند. چون زمان به طورِ صریح در L نیست، پس H پایسته است. داریم:

$$p_i = g_{ij}(q)\, \dot{q}_j, \tag{25}$$

که می‌دهد:

$$p_i\, \dot{q}_i = g_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j = 2\, T \tag{26}$$

که در آن منظور از T انرژی‌جنبشی است. پس برای ِ چنین سیستم‌هائی، از (20) داریم:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T\, \mathrm{d}t = 0, \tag{27}$$

در این جا حالت‌های ِ مختلفی می‌تواند پیش بیاید. فرض کنید پتانسیل نباشد. در این صورت T همان H، و پایسته است. پس T از انتگرال بیرون می‌آید. در این حالت داریم:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = \Delta(t_2 - t_1) = 0, \tag{28}$$

که معنی‌اش این است که سیستم از میان تمام ِ مسیرهای ِ هم انرژی آن مسیر را انتخاب می‌کند که کم‌ترین زمان را طول بکشد. در این حالت ِ خاص اصل به " اصل ِ فِرما "[5] که در اپتیک هندسی با آن آشنا می‌شویم تقلیل می‌یابد.

برای ِ سیستم ِ اشاره‌شده در بالا می‌توان شکل ِ دیگری از اصل ِ کم‌ترین کنش را نوشت. ابتدا توجه کنید که برای ِ سیستم ِ مورد ِ نظر داریم: $H = E = T + V$، که در آن E انرژی‌مکانیکی (جمع ِ T و V) است. با تعریف ِ عنصر ِ طول ِ

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}q_i \mathrm{d}q_j, \tag{29}$$

داریم:

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(q) \tag{30}$$

که می‌دهد:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2(E - V(q))}} \tag{31}$$

با استفاده از این و $T = E - V$ در (27) داریم:

$$\Delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{E - V(q)}\ \mathrm{d}s = 0. \tag{32}$$

به عبارت ِ بالا شکل ِ ژاکوبی ِ اصل ِ کم‌ترین کنش می‌گویند. با این شکل ِ اصل حالت ِ $V = 0$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$\Delta \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s = \Delta(s_2 - s_1) = 0, \tag{33}$$

که می‌گوید از میان ِ مسیرهای ِ هم‌انرژی، مسیری که کمترین طول ِ خم را دارد انتخاب می‌شود. پس، با توجه به (28)، بدون ِ حضور ِ پتانسیل، مسیر ِ حرکت کم‌ترین زمان و طول را دارد. یک مثال ِ ساده از این وضعیت ذره‌ی آزاد در سه بُعد است، با انرژی‌جنبشی ِ

$$L = T = \frac{1}{2}m(\,\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\,), \tag{34}$$

است. از آن جا که می‌دانیم باید خم ِ با کوتاه‌ترین طول را طی کند، پس مسیر ِ حرکت خطّ ِ راست است. مثال ِ دیگر ذره‌ی آزاد روی ِ کُره است:

$$L = T = \frac{1}{2}mR^2(\,\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\ \dot{\phi}^2\,), \tag{35}$$

که در آن R شعاع ِ کُره است. در این جا $g_{11} = mR^2$، $g_{22} = mR^2 \sin^2\theta$، $g_{12} = g_{21} = 0$. با توجه به کوتاه‌ترین خم، این ذره بین ِ هر دو نقطه را روی ِ دایره‌عظیمه‌ای که از آن دو نقطه می‌گذرد حرکت می‌کند.

با استفاده از شکل ِ ژاکوبی می‌توان معادله‌مسیر را بر حسب ِ پارامتر ِ طول روی ِ خم، s، به دست آورد. مثال ِ یک ذره در فضای ِ سه بُعدی را در نظر می‌گیریم:

$$L = \frac{1}{2}m\,\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}). \tag{36}$$

در این مورد

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}, \tag{37}$$

با استفاده از اصل داریم:

$$\begin{aligned}\Delta\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{E - V(\mathbf{r})}\ \mathrm{d}s \quad = \quad & \int_{s_1}^{s_2}\Big(\boldsymbol{\nabla}\sqrt{E - V(\mathbf{r})}\cdot\Delta\mathbf{r}\ \mathrm{d}s \\ & + \sqrt{E - V(\mathbf{r})}\ \Delta\mathrm{d}s\Big) = 0\end{aligned} \tag{38}$$

به $\Delta\mathrm{d}s$ نیاز داریم. با (37) داریم:

$$\mathrm{d}s\ \Delta\mathrm{d}s = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\Delta\mathrm{d}\mathbf{r} \quad\Rightarrow\quad \Delta\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\Delta\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{39}$$

اما داریم: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$، که می‌دهد: $\mathrm{d}\mathbf{r}' = \mathrm{d}\mathbf{r} + \mathrm{d}\Delta\mathbf{r}$ و در نتیجه:

$$\Delta\mathrm{d}\mathbf{r} := \mathrm{d}\mathbf{r}' - \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\Delta\mathbf{r} \tag{40}$$

پس داریم:

$$\Delta\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathrm{d}\Delta\mathbf{r}. \tag{41}$$

با جاگذاری در (38)، و انجام ِ یک بار جزء‌به‌جزء، داریم:

$$\begin{aligned}\Delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{E - V(\mathbf{r})}\ \mathrm{d}s\ &= \int_{s_1}^{s_2} \left(\boldsymbol{\nabla}\sqrt{E - V(\mathbf{r})} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big[\sqrt{E - V(\mathbf{r})}\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\Big]\right) \cdot \Delta\mathbf{r}\ \mathrm{d}s \\ &+ \sqrt{E - V(\mathbf{r})}\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \Delta\mathbf{r}\Big|_1^2 = 0.\end{aligned} \tag{42}$$

جمله‌ی آخر چون $\Delta\mathbf{r}|_1 = \Delta\mathbf{r}|_2 = 0$، سهمی ندارد. پس اگر قرار باشد وردش صفر شود باید انتگرال‌ده صفر باشد که می‌دهد:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big[\sqrt{E - V(\mathbf{r})}\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\Big] = \boldsymbol{\nabla}\sqrt{E - V(\mathbf{r})}, \tag{43}$$

که حلّ ِ آن معادله‌مسیر را به عنوان ِ تابعی از طول ِ خم می‌دهد، $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. توجه داریم که در این عبارت اثری از زمان نیست. عبارت ِ بالا را می‌شود به شکل ِ دیگری درآورد. اولاً توجه داریم:

$$\mathrm{d}V(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla}V \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \boldsymbol{\nabla}V \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\ \mathrm{d}s. \tag{44}$$

با این اطلاعات و یادآوری ِ این که $-\boldsymbol{\nabla}V$ نیرو است، $\mathbf{F}$، داریم:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathbf{F} - (\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{t}})\ \hat{\mathbf{t}}}{2\ \big(E - V(\mathbf{r})\big)}, \tag{45}$$

که در آن $\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}$ بردارِ مماس بر خم است. با توجه به (37)، $\hat{\mathbf{t}}$ بردارِ یکه است: $\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 1$.
عبارتِ به دست آمده در بالا چندان هم برایِ ما ناآشنا نیست. ابتدا داریم:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{t}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R} \tag{46}$$

که در آن R شعاع‌انحنایِ موضعی رویِ خم، و $\hat{\mathbf{n}}$ بردارِ عمود بر $\hat{\mathbf{t}}$ و خم است (چون طولِ $\hat{\mathbf{t}}$ ثابت است مشتقّ‌اش حتماً به آن عمود است). به علاوه توجه می‌کنیم که

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \Big[\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}})\ \hat{\mathbf{t}}\Big] = 0, \tag{47}$$

پس $\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}})\ \hat{\mathbf{t}}$ مولفه‌ای از نیرو است که بر خمِ عمود است، که آن را با $\mathbf{F}_n$ نشان می‌دهیم. با یادآوریِ این که

$$2\ \big(E - V(\mathbf{r})\big) = m\,\dot{\mathbf{r}}^2 = m\,v^2, \tag{48}$$

(45) می‌شود:

$$\mathbf{F}_n = \frac{m\,v^2}{R}\,\hat{\mathbf{n}}, \tag{49}$$

که می‌گوید مولفه‌ی عمودیِ نیرو شتابِ جانبِ مرکزِ با شتابِ انحنایِ موضعیِ R را می‌دهد. می‌بینیم تا جائی که به خمِ معادله‌مسیر ربط دارد تنها آن مولفه از نیرو که به خم عمود است مهم است. این به این خاطر است که تنها مولفه‌ی عمودی است که انحنایِ موضعی را تعیین می‌کند. در واقع آن مولفه‌ای از نیرو که مماسِ بر مسیر است تعیین می‌کند که خم با چه آهنگ و سرعتی طی شود [3].

قدردانی: نویسنده از خرّمی تشکر می‌کند.

0 یادداشت‌ها و مرجع‌ها

[1] H. Goldstein, Classical mechanics, 2nd ed. (Addison-Wesley, 1980), ch. 2.

[2] اصل ِ کم‌ترین‌کنش در فصل ِ 8 مرجع ِ 1، و کتاب زیر آمده است:

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Mechanics, (Pergamon, 1960), p. 140.

[3] ک. ر. سایمون، مکانیک، فصل ِ 3، مسئله‌ی 15.

اسامی ِ خاص:

1) Hamilton's principle, 2) Stationary, 3) Abbreviated action,

4) Maupertuis' principle, 5) Fermat's principle