حل عددی معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه

$y'(x) = y(x) \xrightarrow{\text{مرتبه } 1}$ یک شرط اولیه $\rightarrow \boxed{y(0) = y_0}$

$\xrightarrow{\text{حل روش اول}} y(x) = y_0 e^{x} \longrightarrow y(0) = y_0$ ✓

$\longrightarrow y'(x) = y_0 e^{x} = y(x)$ ✓

حل عددی : $\xrightarrow{\text{تعریف مشتق}} y'(x) = \dfrac{y(x+\varepsilon) - y(x)}{\varepsilon}$ $\leadsto$ بسته به

$\varepsilon \to 0$

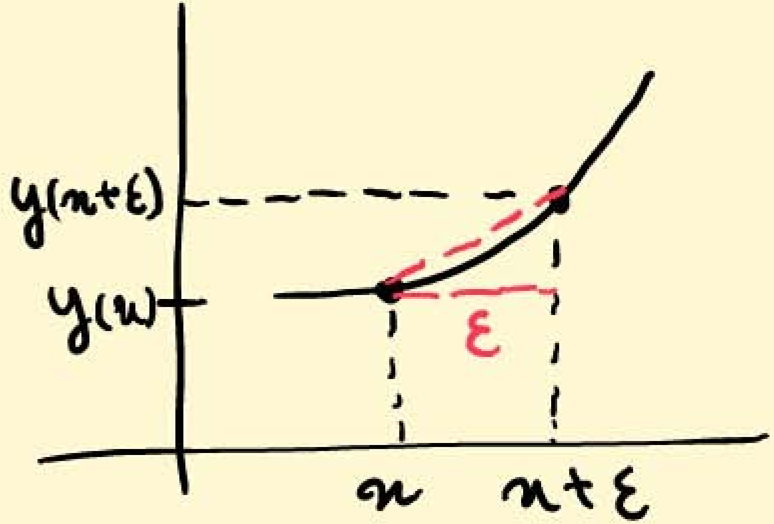
$\xrightarrow{\text{تقریب}} y'(x) \simeq \begin{cases} \dfrac{y(x+\varepsilon) - y(x)}{\varepsilon} \\ \dfrac{y(x) - y(x-\varepsilon)}{\varepsilon} \\ \dfrac{y(x+\varepsilon) - y(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} \end{cases}$

ε: کوچک

هرچی کوچکتر بهتر

1

با تعریف اول



ε کوچکتر خط بیشتر به مماس نزدیک می‌شود

$$y'(x) \simeq \frac{y(x+\varepsilon)-y(x)}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{y(x+\varepsilon)\simeq y(x)+\varepsilon\, y'(x)}$$

در مثال : $y'(x)=y(x)$ $\longrightarrow$ $\boxed{y(x+\varepsilon)=(1+\varepsilon)\,y(x)}$

گسسته‌سازی محور x : $x=0,\varepsilon,2\varepsilon,3\varepsilon,4\varepsilon,\dots \longrightarrow x=n\varepsilon$

$n=0,1,2,\dots\infty$

(۲) لذا: $y((n+1)\varepsilon)=(1+\varepsilon)\,y(n\varepsilon) \longrightarrow \boxed{y_{n+1}=(1+\varepsilon)\,y_n}$ رابطه بازگشتی

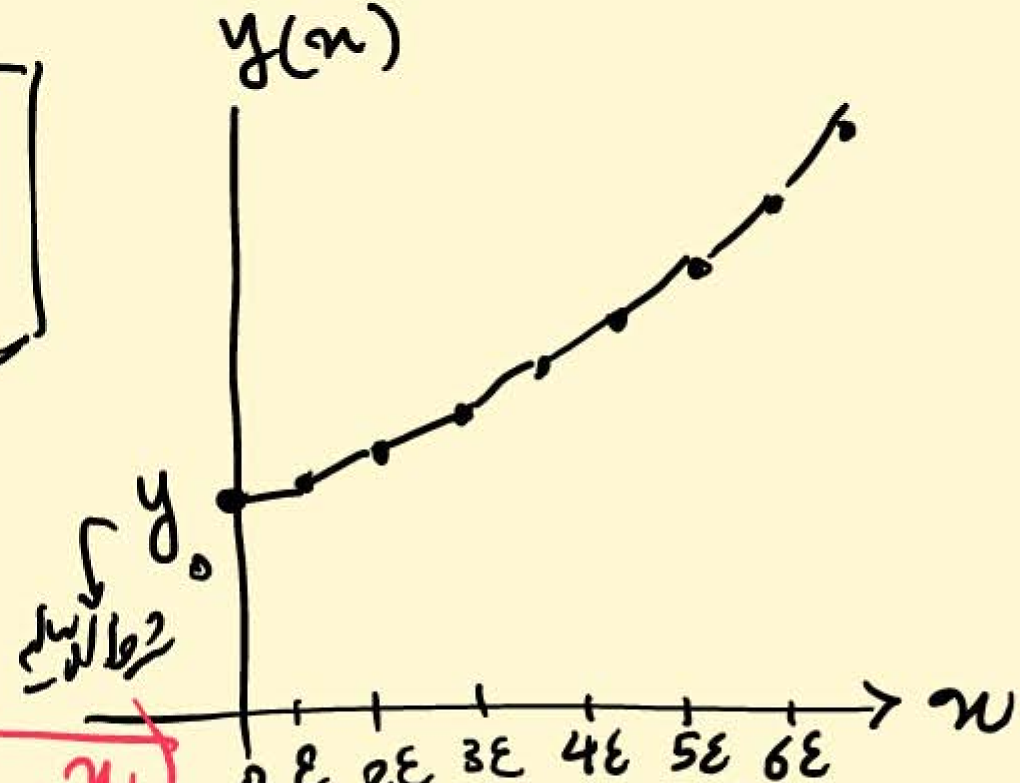
حل رابطه بازگشتی: $y_{n+1}=(1+\varepsilon)y_n$ ، شرط اولیه: $y_{n=0}=y_0$ معلوم

$$y_1=(1+\varepsilon)y_0 \rightarrow$$

$$y_2=(1+\varepsilon)y_1=(1+\varepsilon)^2y_0 \rightarrow$$

$$\vdots$$

$$\boxed{y_n=(1+\varepsilon)^n y_0}$$



$\varepsilon\to 0:\ (1+\varepsilon)^{1/\varepsilon}=e$

$$\hookrightarrow y_n=\Big(\underbrace{(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon}}_{e}\Big)^{\overset{x}{n\varepsilon}}y_0$$

$$\boxed{y(x)=y_0e^x}$$

مثال گسسته سازی از معادلات درجه ۲

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$$

داریم: $y'(x)\simeq \dfrac{y(x+\varepsilon)-y(x)}{\varepsilon} \xrightarrow{\text{پس}} y''(x)\simeq \dfrac{y'(x+\varepsilon)-y'(x)}{\varepsilon} \rightarrow$

$$\rightarrow y''(x)\simeq \frac{\dfrac{y(x+2\varepsilon)-y(x+\varepsilon)}{\varepsilon}-\dfrac{y(x+\varepsilon)-y(x)}{\varepsilon}}{\varepsilon}$$

$$\rightarrow y''(x)\simeq \frac{y(x+2\varepsilon)-2y(x+\varepsilon)+y(x)}{\varepsilon^2}$$

تقریبی: $\dfrac{1}{\varepsilon^2}\big(y(x+2\varepsilon)-2y(x+\varepsilon)+y(x)\big)+\dfrac{1}{\varepsilon}p(x)\big(y(x+\varepsilon)-y(x)\big)$

$$+q(x)y(x)=0$$

رتبه دوم : $y(x+2\varepsilon)=\left(2-\varepsilon p(x)\right)y(x+\varepsilon)-\left(1-\varepsilon p(x)+\varepsilon^{2}q(x)\right)y(x)$

معادله مرتبه ۲ : $\xrightarrow{\text{۲ شرط اولیه}}$ $\boxed{y(0)=y_0}$, $y'(0)=m_0 \rightarrow$ داده شده

$$y'(0)\simeq\frac{y(\varepsilon)-y(0)}{\varepsilon}\Rightarrow y(\varepsilon)\simeq y(0)+\varepsilon y'(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(\varepsilon)=y_0+\varepsilon m_0}$$

جایگذاری : $y(2\varepsilon)=\left(2-\varepsilon p(0)\right)y(\varepsilon)-\left(1-\varepsilon p(0)+\varepsilon^{2}q(0)\right)y(0)$

$$y(2\varepsilon)=\left(2-\varepsilon p(0)\right)\left(y_0+\varepsilon m_0\right)-\left(1-\varepsilon p(0)+\varepsilon^{2}q(0)\right)y_0$$

به همین ترتیب : $y(3\varepsilon),\ y(4\varepsilon),\ y(5\varepsilon),\ \dots$

نوشتن به شکل «روابط بازگشتی»:

$x = n\varepsilon\,, \qquad x+\varepsilon = (n+1)\varepsilon\,, \qquad x+2\varepsilon = (n+2)\varepsilon$

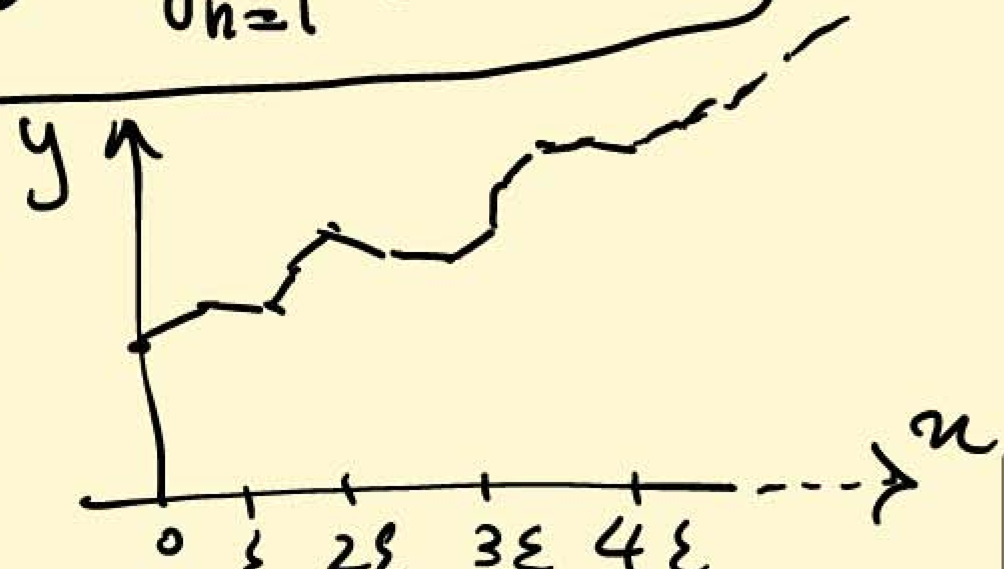
$y(x) = y(n\varepsilon) \to y_n \qquad y(x+\varepsilon) \to y_{n+1} \qquad y(x+2\varepsilon) \to y_{n+2}$

$p(x) = p(n\varepsilon) \to p_n \qquad q(x) = q(n\varepsilon) \to q_n$

$$\to \boxed{y_{n+2} = (2-\varepsilon p_n)\, y_{n+1} - (1-\varepsilon p_n + \varepsilon^2 q_n)\, y_n}$$

شرط اولیه: $\quad y_{n=0} = y_0\,, \quad y_{n=1} = y_0 + \varepsilon m_0$

$\to y_2\,,\ y_3\,,\ y_4\,,\ \cdots$



9