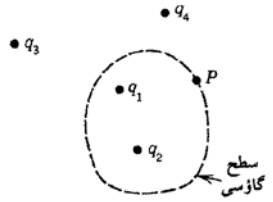
فصل ۲۹ – قانون گاوس:

پرسشها:

۴. سطح گاوسی را که بخشی از توزیع بار در شکل ۱۹ را احاطه می‌کند درنظر بگیرید. (الف) کدام‌یک از بارها در میدان الکتریکی در نقطهٔ P سهیم‌اند؟ (ب) آیا مقدار شار عبوری از این سطح گاوسی با درنظرگرفتن میدان ناشی از بارهای q_1 و q_2 از شار مربوط به میدان کل، بزرگتر، مساوی، یا کوچکتر است؟



شکل ۱۹. پرسش ۴.

۸. در قانون گاوس،

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q$$

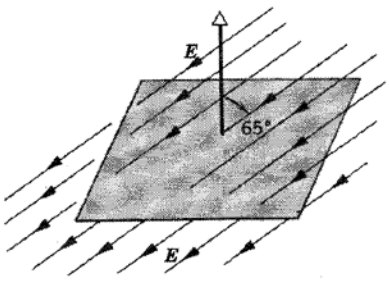
آیا $\mathbf{E}$ الزاماً میدان الکتریکی ناشی از بار q است؟

۱۰. فرض کنید که یک سطح گاوسی حاوی هیچ باری نباشد. آیا قانون گاوس ایجاب می‌کند که میدان $\mathbf{E}$ در همه جا روی سطح گاوسی صفر باشد؟ آیا عکس این عبارت درست است؛ یعنی اگر $\mathbf{E}$ در همه جا روی یک سطح گاوسی صفر باشد، آیا قانون گاوس ایجاب می‌کند که هیچ بار خالصی در داخل آن سطح وجود ندارد؟

۲۱. بار مثبت q را در مرکز یک کرهٔ فلزی توخالی قرار داده‌ایم. چه بارهایی (الف) روی سطح داخلی و (ب) روی سطح خارجی کره قرار می‌گیرد؟ (ج) اگر جسم فلزی (باردارنشده‌ای) را به کره نزدیک کنید آیا جوابهای قسمتهای (الف) و (ب) تغییر خواهد کرد؟ آیا توزیع بار روی سطح کره تغییر خواهد کرد؟

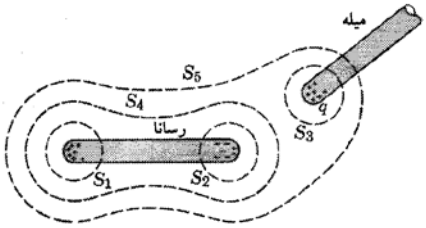
مسئله‌ها:

۱. طول ضلع مسطح مربعی در شکل ۲۱ برابر ۳٫۲mm است. این سطح در میدان الکتریکی یکنواختی به‌شدت $E = ۱۸۰۰ \mathrm{N/C}$ غوطه‌ور است. خطوط میدان، مطابق شکل، با خط عمود برسطح "به‌سمت خارج" زاویهٔ $65°$ می‌سازند. شار عبوری از این سطح را محاسبه کنید.



شکل ۲۱. مسئلهٔ ۱.

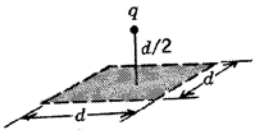
۴. بارهای موجود در یک رسانای عایق‌بندی‌شده که ابتدا بدون بار است، با نگه‌داشتن یک میلهٔ باردار با بار مثبت در نزدیکی آن از هم جدا شده‌اند. نگاه کنید به شکل ۲۳. شار عبوری را برای پنج سطح گاوسی نشان داده‌شده در شکل محاسبه کنید. فرض کنید که بار القاشدهٔ منفی روی رسانا برابر با مثبت q روی میله است.



شکل ۲۳. مسئلهٔ ۴.

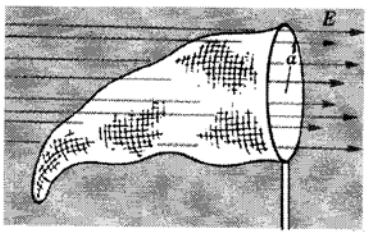
۵. بار نقطه‌ای q به اندازهٔ $۱٫۸۴\mu\mathrm{C}$ در مرکز یک سطح گاوسی مکعبی به ضلع ۵۵ سانتی‌متر قرار گرفته است. شار الکتریکی Φ_E را که از سطح این مکعب می‌گذرد معین کنید.

۷. بار نقطه‌ای $q+$ در فاصلهٔ $d/۲$ از سطح مربعی به ضلع d در بالای مرکز آن قرار دارد. نگاه کنید به شکل ۲۴. شار الکتریکی عبوری از مربع را معین کنید. (راهنمایی: مربع را رخ مکعبی به ضلع d درنظر بگیرید.)



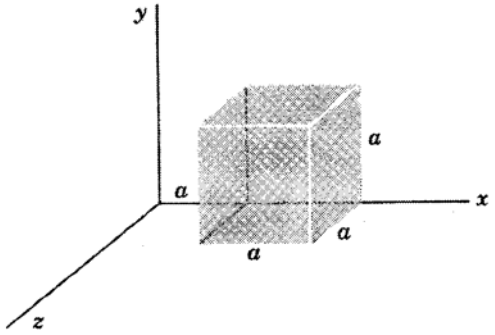
شکل ۲۴. مسئلهٔ ۷.

۸. یک تور پروانه‌گیری مطابق شکل ۲۵ در میدان الکتریکی یکنواخت E قرار دارد. قاب این تور، دایره‌ای به شعاع a، عمود بر میدان است. شار الکتریکی که از تور می‌گذرد را نسبت به بردار عمود بر سطح به‌طرف خارج بیابید.



شکل ۲۵. مسئلهٔ ۸.

۱۳. در شکل ۲۶ مؤلفه‌های میدان الکتریکی عبارت‌اند از $E_x = bx^{1/2}$، $E_y = E_z = ۰$، که در اینجا $b = ۸۸۳۰ \mathrm{N/C \cdot m^{1/2}}$ است. (الف) شار Φ_E عبوری از مکعب و (ب) بار موجود در آن را محاسبه کنید. فرض کنید که $a = ۱۳٫۰ \mathrm{cm}$.

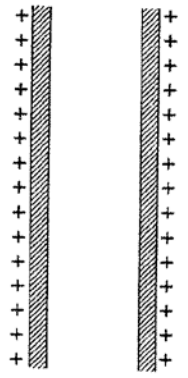


شکل ۲۶. مسئلهٔ ۱۳.

۱۴. یک کرهٔ رسانا و با بار یکنواخت به شعاع ۰٫۲۲m دارای چگالی سطحی بار $8{,}13\mu C/m^2$ است. (الف) بار موجود روی کره را پیدا کنید. (ب) شار الکتریکی کل که از سطح کره می‌گذرد چقدر است؟ (ج) میدان الکتریکی را در سطح کره محاسبه کنید.

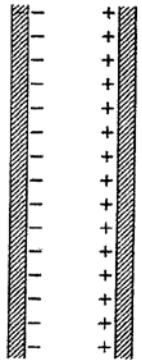
۱۷. کرهٔ رسانایی را که حامل بار Q است یک پوستهٔ رسانای کروی احاطه کرده است. (الف) بار خالص روی جدار داخلی پوسته چقدر است؟ (ب) بار دیگری به‌اندازهٔ q در خارج از پوسته قرار می‌دهیم. اکنون بار خالص روی سطح داخلی پوسته چقدر است؟ (ج) اگر بار q را در جایی بین پوسته و کره قرار دهیم، مقدار بار خالص روی سطح داخلی پوسته چقدر می‌شود؟ (د) آیا اگر کره و پوسته متحدالمرکز نباشند جوابهایتان معتبر است؟

۲۲. شکل ۲۷ دو ورقهٔ بزرگ و نازک نارسانا از بار مثبت را نشان می‌دهد که در برابر هم قرارگرفته‌اند. مقدار $\mathbf{E}$ در نقاط زیر چقدر است (الف) طرف چپ هر دو ورقه (ب) بین دو ورقه و (ج) در طرف راست دو ورقه برای هر دو ورقه چگالی بار سطحی σ را یکسان درنظر بگیرید. تنها نقاطی را درنظر بگیرید که خیلی نزدیک به لبه‌ها نباشند و فاصلهٔ آنها از دو ورقه در مقابله با ابعاد آنها کوچک باشد. (راهنمایی: مثال ۶ را ببینید.)



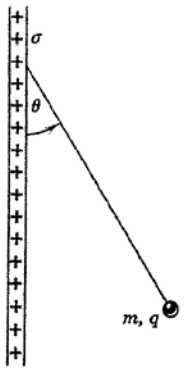
شکل ۲۷. مسئلهٔ ۲۲.

۲۳. دو صفحهٔ فلزی بزرگ مطابق شکل ۲۸ روبه‌روی هم قرارگرفته‌اند و حامل بارهایی با چگالی سطحی $\sigma+$ و $\sigma-$ روی سطوح داخلی خود هستند. میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در نقاط زیر بیابید (الف) سمت چپ دو صفحه، (ب) بین دو صفحه و (ج) سمت راست دو صفحه. تنها نقاطی را درنظر بگیرید که به لبه‌ها نزدیک نباشند و فاصلهٔ آنها از صفحه‌ها در مقایسه با ابعاد آنها کوچک باشد. (راهنمایی: مثال ۶ را ببینید.)



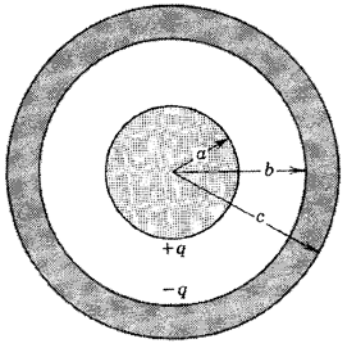
شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۳.

۲۵. گوی کوچکی که جرم m آن ۰٫۱۲mg است حامل بار $q = 19{,}7nC$ است. این گوی در میدان گرانشی زمین از یک رشته نخ ابریشمی آویخته شده است که، مطابق شکل ۲۹، با یک صفحهٔ نارسانای بزرگ دارای بار یکنواخت، زاویهٔ $\theta = 27{,}4^\circ$ می‌سازد. چگالی بارسطحی یکنواخت را برای این صفحه محاسبه کنید.



شکل ۲۹. مسئلهٔ ۲۵.

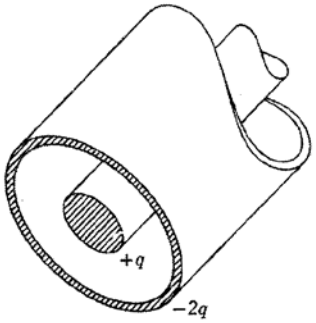
۲۸. شکل ۳۰ نشان می‌دهد که بار $q+$ به‌صورت یک کرهٔ رسانای یکنواخت به شعاع a درآمده و در مرکز یک پوستهٔ کروی به شعاع داخلی b و شعاع خارجی c قرارگرفته است. پوستهٔ خارجی حامل بار $q-$ است. میدان الکتریکی $E(r)$ را در مکانهای زیر به‌دست آورید (الف) داخل کره $(r < a)$، (ب) بین کره و پوسته $(a < r < b)$،



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۲۸.

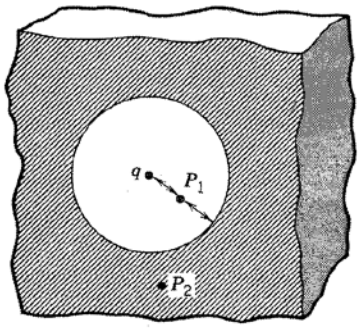
(ج) در داخل پوسته $(b < r < c)$ و (د) خارج پوسته $(r > c)$. (ه) روی سطوح داخلی و خارجی پوسته کروی چه بارهایی ظاهر می‌شود؟

۲۹. یک استوانه رسانای بسیار طویل (به‌طول L) حامل بار کل $+q$ است و یک پوستهٔ استوانه‌ای رسانا (آن هم به‌طول L) با بار کل $-2q$ آن را احاطه کرده است. مقطع این مجموعه را در شکل ۳۱ نشان داده‌ایم. با بهره‌گیری از قانون گاؤس کمیتهای زیر را معین کنید؛ (الف) میدان الکتریکی در خارج از پوستهٔ استوانه‌ای رسانا، (ب) توزیع بار روی پوستهٔ استوانه‌ای و (ج) میدان الکتریکی در ناحیهٔ بین استوانه‌ها.



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۲۹.

۳۰. شکل ۳۲ بار نقطه‌ای $q = ۱۲۶\text{nC}$ را در مرکز یک کاواک کروی به شعاع $۳٫۶۶\text{cm}$ در یک قطعه فلز نشان می‌دهد. از قانون گاؤس استفاده کنید و میدان الکتریکی را در نقطهٔ (الف) $P_۱$، در وسط مرکز و سطح کاواک و (ب) $P_۲$ داخل فلز بیابید.



شکل ۳۲. مسئلهٔ ۳۰.

۳۴. شکل ۳۵ مقطعی از دو پوستهٔ استوانه‌ای هم‌مرکز نازک دراز با شعاعهای a و b را نشان می‌دهد. استوانه‌ها حامل بار بر واحد طول مساوی و مختلف‌العلامت λ هستند. از قانون گاؤس بهره بگیرید و ثابت کنید که (الف) برای $r < a$ داریم $E = ۰$ و (ب) در فاصلهٔ بین دو استوانهٔ میدان E از معادله زیر به‌دست می‌آید

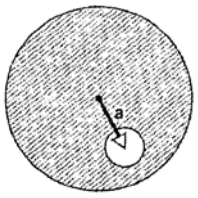
$$E = \frac{۱}{۲\pi\epsilon_۰}\frac{\lambda}{r}$$

شکل ۳۵. مسئلهٔ ۳۴.

۳۸. در مرکز یک پوستهٔ بدون بار کروی فلزی نازک بار نقطه‌ای q قرار دارد. با بهره‌گیری از قانون گاؤس رابطه‌ای را برای میدان الکتریکی (الف) در داخل پوسته و (ب) خارج از پوسته، به‌دست آورید. (ج) آیا پوسته هیچ تأثیری بر میدان ناشی از q دارد؟ (د) آیا وجود بار q هیچ تأثیری روی پوسته دارد؟ (ه) اگر یک‌بار نقطه‌ای دیگر را در خارج از پوسته نگه داریم، آیا بر این بار بیرونی نیرویی وارد می‌شود؟ (و) آیا بر بار داخلی نیرویی وارد می‌شود؟ (ز) آیا در اینجا تناقضی با قانون سوم نیوتون وجود دارد؟ اگر پاسخ آری است چرا و اگر پاسخ شما خیر است چرا؟

۴۲. درناحیهٔ کروی $a < r < b$ با بار با چگالی حجمی $\rho = A/r$ توزیع شده است، که در آن A مقداری ثابت است. در مرکز این کره ($r = ۰$) بار نقطه‌ای q قرار گرفته است. مقدار ثابت A چقدر باشد تا شدت میدان الکتریکی در ناحیهٔ $a < r < b$ اندازه‌ای ثابت داشته باشد؟

۴۴. یک ناحیه کروی حامل بار بر واحد حجم یکنواخت ρ است. فرض کنید $\mathbf{r}$ برداری است که مرکز کره را به یک نقطه عمومی P در داخل کره وصل می‌کند. (الف) نشان دهید که میدان الکتریکی در نقطه P از رابطهٔ $\mathbf{E} = \rho\mathbf{r}/۳\epsilon_۰$ به‌دست می‌آید. (ب) در داخل این کره، مطابق شکل ۳۷، یک کاواک کروی ایجاد می‌کنیم. با بهره‌گیری از مفاهیم برهم‌نهی، نشان دهید که میدان الکتریکی در تمام نقاط واقع در داخل کاواک برابر است با $\mathbf{E} = \rho\mathbf{a}/۳\epsilon_۰$ (میدان یکنواخت)، در اینجا $\mathbf{a}$ برداری است که مرکز کره را به مرکز کاواک متصل می‌کند. توجه کنید که هر دو نتیجه مستقل از شعاعهای کره و کاواک است.



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۴۴.

۴۷. کرهٔ نارسانایی به شعاع R حامل توزیع بار غیر یکنواختی است که در آن چگالی بار با $\rho = \rho_s r/R$ مشخص شده است. در این معادله ρ_s ثابت و r فاصلهٔ نقطه از مرکز کره است. نشان دهید که (الف) بار کل موجود در کره $Q = \pi\rho_s R^۳$ است و (ب) میدان الکتریکی در داخل کره از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$E = \frac{۱}{۴\pi\epsilon_۰}\frac{Q}{R^۴}r^۲$$