FAT-102

ساعتِ آفتابی

محمّدِ خرّمی، فرینازِ روشنی، احمدِ شریعتی، و امیرحسینِ فتح‌اللهی

mamwad@alzahra.ac.ir

farinaz@iasbs.ac.ir

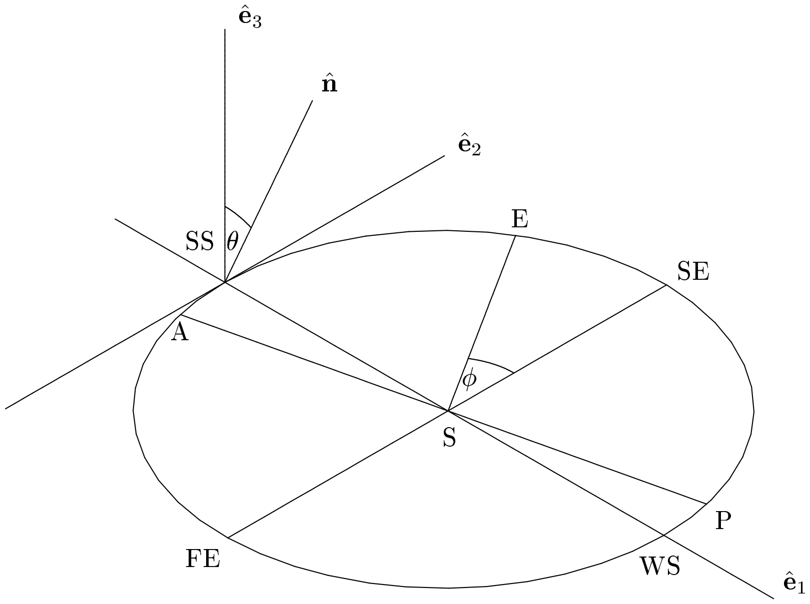
shariati@mailaps.org

fatho@mail.cern.ch

هندسه‌ی چرخشِ زمین به دورِ خود، و گردشِ آن به دورِ خورشید بررسی می‌شود.
با استفاده از آن طرحِ یک ساعتِ آفتابی، و نیز روشِ دقیق‌کردنِ آن معرفی می‌شود.

0 مقدمه

زمین دورِ محورِ قطبی ي خود می‌چرخد و دوره ي این چرخش 23 ساعت و 56 دقیقه است (روزِ نجومی). ظهر وقت ی است که خورشید در آسمان درست به طرفِ جنوب (یا شمال) است. زمین دورِ خورشید هم می‌گردد و دوره ي این حرکت 366.24 روزِ نجومی است (یک سالِ خورشیدی). چنان که خواهیم دید، به خاطرِ این حرکتِ انتقالی مدتِ بینِ دو ظهرِ متوالی کم ی بیش از روزِ نجومی می‌شود. به این مدت روزِ خورشیدی می‌گویند. تعدادِ روزها ي خورشیدی در یک سال یک ی کم‌تر از تعدادِ روزها ي نجومی است. بنابراین هر سال 365.24 روزِ خورشیدی است. به‌تر است بگوییم 365.24 روزِ خورشیدی ي متوسط. چون (چنان که خواهیم دید) فاصله ي زمانی ي بینِ دو ظهرِ متوالی یک‌سان نیست بل که به این بسته‌گی دارد که در کدام روزِ سال ایم. این پدیده دو

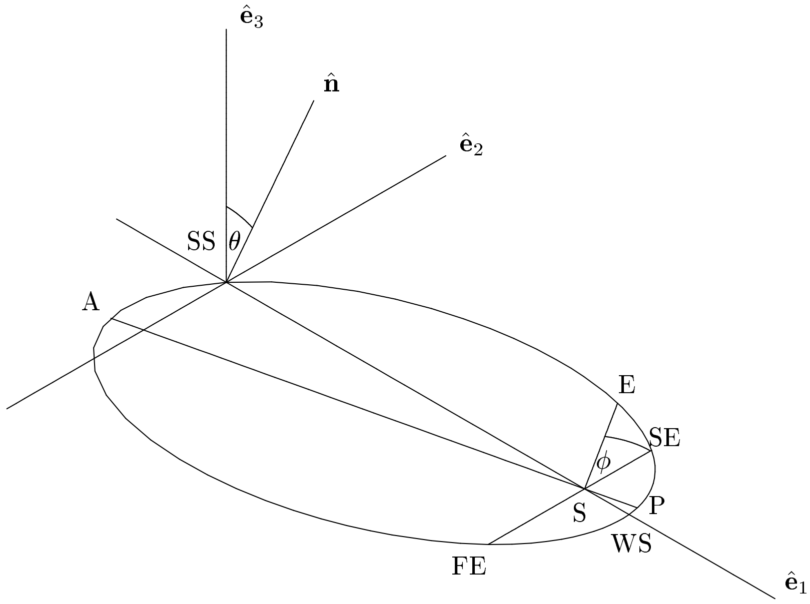


S:	خورشید	SS:	انقلابِ تابستانی
E:	زمین	FE:	اعتدالِ پاییزی
A:	اوج	WS:	انقلابِ زمستانی
P:	حضیض	SE:	اعتدلالِ بهاری

شکلِ 1

علت دارد. یک ی این که مدارِ زمین به دورِ خورشید بیضی است نه دایره. خروج‌ازمرکزِ این بیضی 0.017 است. (بنابراین این بیضی خیل ی شبیهِ دایره است.) دیگر این که محورِ چرخشِ زمین بر صفحه ي مداری ي زمین به دورِ خورشید عمود نیست. محورِ چرخشِ زمین با عمود بر صفحه ي مداری ي زمین زاویه ي θ می‌سازد، که مقدارِ این زاویه $23°27'$ است. چون خروج‌ازمرکزِ مدارِ زمین خیل ی کم است، فاصله ي زمین تا خورشید چندان تغییر نمی‌کند. پس گرم‌وسردبودنِ روز با این تعیین می‌شود که زاویه ي تابشِ خورشید نسبت به سطحِ زمین چه قدر است و طولِ روز چه قدر است.

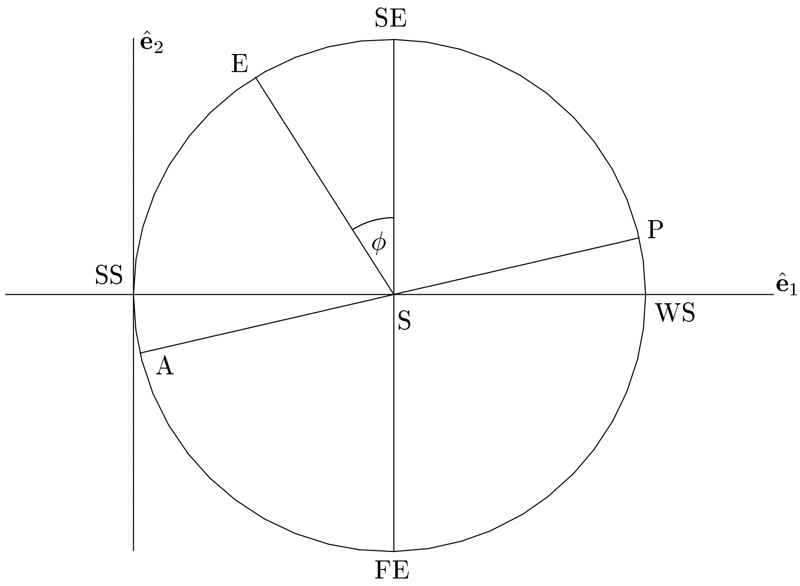
وقت ی زاویه ي خطِ واصلِ زمین به خورشید، با محورِ قطبی ي زمین کم‌ترین مقدارِ ممکن $((\pi/2) - \theta)$ است، طولِ روز در نیم‌کره ي شمالی بیشینه است. به این زمان



SS:	انقلابِ تابستانی	S:	خورشید
FE:	اعتدالِ پاییزی	E:	زمین
WS:	انقلابِ زمستانی	A:	اوج
SE:	اعتدالِ بهاری	P:	حضیض

شکلِ 2

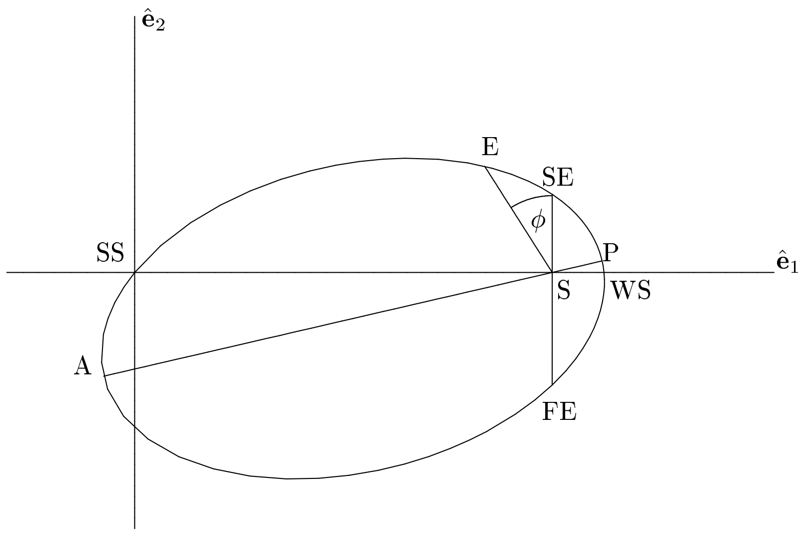
انقلابِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی می‌گوییم. در این حالت طولِ روز در نیم‌کره یِ جنوبی کمینه است. پس به همین زمان انقلابِ زمستانی یِ نیم‌کره یِ جنوبی هم می‌گوییم. وقت ی زاویه یِ خطِ واصلِ زمین به خورشید با محورِ خورشید بیشینه $((\pi/2)+\theta)$ است، طولِ روز در نیم‌کره یِ شمالی کمینه و در نیم‌کره یِ جنوبی بیشینه است. به این زمان انقلابِ زمستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی، یا انقلابِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ جنوبی، می‌گوییم. دو بار در سال است که خطِ واصلِ زمین به خورشید بر محورِ چرخشِ زمین عمود می‌شود. به این دوزمان اعتدالین می‌گویند. اعتدالِ بهاری پس از انقلابِ زمستانی و پیش از انقلابِ تابستانی است، و اعتدالِ پاییزی برعکس.



S:	خورشید	SS:	انقلابِ تابستانی
E:	زمین	FE:	اعتدالِ پاییزی
A:	اوج	WS:	انقلابِ زمستانی
P:	حضیض	SE:	اعتدلالِ بهاری

شکلِ 3

این چهارنقطه در مدارِ زمین، علی‌الاصول به نقاطِ اوج و حضیضِ مدارِ زمین ربط ی ندارند. در واقع به خاطرِ این که محورِ چرخشِ زمین با دوره یِ حدوداً 26 000 سال پیش‌روی می‌کند، جا یِ این چهارنقطه هم رو یِ مدارِ زمین عوض می‌شود. اما 26 000 سال خیل ی طولانی است. برا یِ زمان‌ها یِ در حدِ عمرِ انسان، محورِ چرخشِ زمین ثابت است و جهتِ آن فعلاً چنان است که تصادفاً انقلابِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی نزدیکِ نقطه یِ اوجِ مدارِ زمین است. فعلاً نقطه یِ اوجِ مدارِ زمین تقریباً 14 روز پس از انقلابِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی است و نقطه یِ حضیضِ مدارِ زمین تقریباً 14 روز پس از انقلابِ زمستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی. شکلِ 1 هندسه یِ مدارِ زمین را نشان می‌دهد. شکلِ 2 همان شکلِ 1 اما با خروج‌ازمرکزِ اغراق‌آمیز ($e = 0.8$)



شکلِ 4

SS:	انقلابِ تابستانی	S:	خورشید
FE:	اعتدالِ پاییزی	E:	زمین
WS:	انقلابِ زمستانی	A:	اوج
SE:	اعتدلالِ بهاری	P:	حضیض

است، تا بیضی‌بودنِ مدارِ زمین مشخص باشد. شکل‌ها يِ 3 و 4 هم تصویرِ دوبعدی يِ شکل‌ها يِ 1 و 2 اند.

از شکلِ 3 دیده می‌شود که مدارِ زمین واقعاً خیل ی شبیهِ دایره است. اختلافِ نسبی يِ قطرِ بزرگ و کوچکِ بیضی برا يِ خروج‌ازمرکزها يِ کوچک $e^2/2$ است، که برا يِ مدارِ زمین از مرتبه يِ 10^{-4} می‌شود. همین است که چنین‌اختلاف ی رو يِ شکل دیده نمی‌شود. تغییراتِ نسبی يِ فاصله يِ زمین تا خورشید از این بیش‌تر است. این تغییرات برابرِ $2e$ است، که تقریباً 0.035 است. اما تغییرِ طولِ روز، و تغییرِ زاویه يِ تابشِ خورشید نسبت به سطحِ زمین خیل ی بیش از این مقدار است. البته مقدارِ این تغییرات به عرضِ جغرافیایی بسته‌گی دارد. اگر هندسه يِ مدارِ زمین با چیز ی که فعلاً داریم فرق

می‌کرد، ترتیب ِ فصل‌ها چیز ِ دیگر ی می‌شد. مثلاً فرض کنید خروج‌ازمرکز ِ مدار ِ زمین خیل ی بیش‌تر از مقدار ِ فعلی می‌بود، و انحراف ِ محور ِ قطبی یِ زمین از عمود بر مدار ِ زمین خیل ی کم‌تر. در آن صورت فاصله یِ زمین تا خورشید فصل را تعیین می‌کرد، و معنی یِ این حرف آن است که تابستان ِ نیم‌کره‌ها یِ شمالی و جنوبی هم‌زمان می‌شد.

1 جا یِ سایه رو یِ سطح ِ زمین

بردار ِ یکه یِ $\hat{\mathbf{e}}_1$ را در جهت ِ خط ِ واصل ِ زمین به خورشید در انقلاب ِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی، و بردار ِ یکه یِ $\hat{\mathbf{e}}_3$ را در جهت ِ عمود بر صفحه یِ مداری یِ زمین به طرف ِ شمال می‌گیریم. ضمناً

$$\hat{\mathbf{e}}_2 := \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1. \tag{1}$$

محور ِ قطبی یِ زمین را با $\hat{\mathbf{n}}$، و خط ِ واصل ِ زمین به خورشید را با $\hat{\mathbf{s}}$ نشان می‌دهیم. زاویه یِ محور ِ قطبی یِ زمین با بردار ِ $\hat{\mathbf{e}}_3$ را با θ، و زاویه یِ $\hat{\mathbf{s}}$ با خط ِ واصل ِ زمین به خورشید در اعتدال ِ بهاری را با ϕ نشان می‌دهیم. داریم

$$\hat{\mathbf{n}} = \sin\theta\ \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta\ \hat{\mathbf{e}}_3, \tag{2}$$

و

$$\hat{\mathbf{s}} = \sin\phi\ \hat{\mathbf{e}}_1 - \cos\phi\ \hat{\mathbf{e}}_2. \tag{3}$$

از اینجا α (زاویه یِ $\hat{\mathbf{n}}$ با $\hat{\mathbf{s}}$) به دست می‌آید:

$$\cos\alpha = \sin\theta \sin\phi. \tag{4}$$

برا یِ به‌دست‌آوردن ِ تصویر ِ خورشید رو یِ سطح ِ زمین، اول جهت ِ $\hat{\mathbf{s}}$ نسبت به زمین را حساب می‌کنیم. برا یِ این کار مختصات ِ نسبت‌به‌زمین‌ثابت ی تعریف می‌کنیم. محور ِ z را محور ِ قطبی یِ زمین می‌گیریم. محور ِ x را مماس بر زمین در جهت ِ شرق، و محور ِ y را چنان می‌گیریم که

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}. \tag{5}$$

مبدئِ زمان را ظهر می‌گیریم. در این صورت جهتِ خورشید در $t = 0$ (یعنی وقت ی خورشید در راستا یِ شمالی- جنوبی یِ آسمان است) می‌شود

$$\hat{\mathbf{s}}(0) = -\hat{\mathbf{y}} \sin\alpha + \hat{\mathbf{z}} \cos\alpha. \tag{6}$$

حرکتِ ظاهری یِ خورشید در آسمان دوران با سرعتِ زاویه‌ای یِ ω- حولِ محورِ قطبی (محورِ z) است. ماتریسِ این دوران می‌شود

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

از این‌جا بردارِ جهتِ خورشید در زمانِ t به دست می آید:

$$\hat{\mathbf{s}}(t) = R(t)\hat{\mathbf{s}}(0), \tag{8}$$

یا

$$\hat{\mathbf{s}}(t) = -\hat{\mathbf{x}} \sin\alpha \sin\omega t - \hat{\mathbf{y}} \sin\alpha \cos\omega t + \hat{\mathbf{z}} \cos\alpha. \tag{9}$$

ذکرِ دو نکته بد نیست. اولاً از تغییرِ α طیِ یک شبانه‌روز چشم پوشیده ایم. ثانیاً ω سرعتِ زاویه‌ای یِ خورشیدی یِ چرخش یِ زمین است. این سرعت برابر است با 2π تقسیم بر روزِ خورشیدی. اما خواهیم دید روزِ خورشیدی ثابت نیست. از تغییرِ ω طیِ یک شبانه‌روز هم چشم پوشیده ایم.

حالا صفحه ای را در نظر بگیرید که در نقطه ای به عرضِ جغرافیایی یِ λ بر زمین مماس باشد. بردارِ یکه یِ عمود بر این صفحه بردارِ یکه یِ شعاعی در آن نقطه است، که آن را با $\hat{\mathbf{r}}$ نشان می‌دهیم:

$$\hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{y}} \cos\lambda + \hat{\mathbf{z}} \sin\lambda. \tag{10}$$

بردارِ سایه یِ یک میله یِ واحد روی این صفحه می‌شود

$$\mathbf{S}(t) = -\frac{1}{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{s}}(t)}[\hat{\mathbf{s}}(t) - \hat{\mathbf{r}}\, \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{s}}(t)]. \tag{11}$$

داریم

$$\cos\xi := \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{s}}(t) = \cos\lambda \sin\alpha \cos\omega t + \sin\lambda \cos\alpha, \tag{12}$$

که در آن ξ زاویه یِ جهتِ خورشید با بردارِ عمود بر سطحِ زمین است. از آن‌جا

$$\mathbf{S}(t) = (\cos\lambda\sin\alpha\cos\omega t + \sin\lambda\cos\alpha)^{-1}[\hat{\mathbf{x}}\sin\alpha\sin\omega t + \hat{\mathbf{y}}\sin\lambda(\sin\lambda\sin\alpha\cos\omega t - \cos\lambda\cos\alpha) + \hat{\mathbf{z}}\cos\lambda(\sin\lambda\sin\alpha\cos\omega t - \cos\lambda\cos\alpha)]. \quad (13)$$

حالا یک دست‌گاهِ جدید تعریف می‌کنیم که دو تا از بردارهایِ‌یکه یِ آن بر سطحِ زمین مماس اند. بردارِ $\hat{\mathbf{X}}$ را همان $\hat{\mathbf{x}}$ می‌گیریم. بردارِ $\hat{\mathbf{Y}}$ را بردارِ یکه یِ مماس بر سطحِ زمین به طرفِ شمال می‌گیریم. $\hat{\mathbf{Z}}$ را هم عمود بر سطحِ زمین به طرفِ بالا می‌گیریم:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{y}}\sin\lambda + \hat{\mathbf{z}}\cos\lambda,$$
$$\hat{\mathbf{Z}} = -\hat{\mathbf{y}}\cos\lambda + \hat{\mathbf{z}}\sin\lambda = \hat{\mathbf{r}}. \quad (14)$$

از این‌جا مختصاتِ سایه رو یِ سطحِ زمین به دست می‌آید:

$$X = \frac{\sin\alpha\sin\omega t}{\cos\lambda\sin\alpha\cos\omega t + \sin\lambda\cos\alpha},$$

$$Y = \frac{-\cos\lambda\cos\alpha + \sin\lambda\sin\alpha\cos\omega t}{\cos\lambda\sin\alpha\cos\omega t + \sin\lambda\cos\alpha}. \quad (15)$$

یک ی از نتایجِ این رابطه، زمانِ طلوع و غروبِ خورشید است. در طلوع و غروب، طولِ سایه بی‌نهایت می‌شود، یعنی $\cos\xi = 0$. پس داریم

$$\omega t_0 = \pm\cos^{-1}(-\tan\lambda\cot\alpha). \quad (16)$$

در عرضِ جغرافیایی یِ صفر (استوا) طرفِ راستِ عبارتِ بالا می‌شود $\pm\pi/2$، یعنی طولِ روز نصفِ طولِ شبانه‌روز است، و به فصل بسته‌گی ندارد. در نیم‌کره یِ شمالی، اگر $\alpha < \pi/2$، آن‌گاه اندازه یِ ωt_0 بیش از $\pi/2$ می‌شود، یعنی طولِ روز بیش از نصفِ طولِ شبانه‌روز می‌شود. این مربوط است به نیمه یِ اولِ سال (بهار و تابستانِ نیم‌کره یِ شمالی). در نیمه یِ دیگرِ سال $\alpha > \pi/2$، و طولِ روز کم‌تر از نصفِ طولِ شبانه‌روز است. بیش‌ترین طولِ روز (در نیم‌کره یِ شمالی) وقت ی است که α کمینه $((\pi/2) - \theta)$ است (انقلابِ تابستانی یِ نیم‌کره یِ شمالی). مدارِ قطبی یِ شمالی $\lambda = (\pi/2) - \theta$ است. شمالِ این مدار $(\lambda > (\pi/2) - \theta)$ منطقه یِ قطبی یِ شمالی است. وقت ی $\alpha < \lambda$، مقدارِ $\cos\xi$ هم‌واره مثبت می‌ماند. این مربوط به زمان ی از سال است که خورشید

در آن عرضِ‌جغرافیایی غروب نمی‌کند. اگر $\alpha > \pi - \lambda$، آن‌گاه $\cos\xi$ هم‌واره منفی است، یعنی خورشید زیرِ افق است. این زمانِ شبِ دائمی در آن عرضِ‌جغرافیایی است. مشابهِ همین‌ها با شش ماه فاصله، در نیم‌کره یِ جنوبی رخ می‌دهد.

چنان که دیدیم، بیش‌ترین مقدارِ تابشِ خورشید به زمین طیِ یک روز، به زاویه یِ خورشید با عمود بر سطحِ زمین، و طولِ روز بسته‌گی دارد. کم‌ترین مقدارِ زاویه یِ تابشِ خورشید با سطحِ زمین (رابطه یِ (12)) سرِ ظهر است و در این حالت،

$$\cos\xi = \sin(\lambda + \alpha). \tag{17}$$

مدارِ رأس‌السرطان $\lambda = \theta$، و مدارِ رأس‌الجدی $\lambda = -\theta$ است. به ناحیه یِ بینِ این دو مدار ($|\lambda| < \theta$) ناحیه یِ حاره می‌گویند. در این‌جا ممکن است ξ صفر شود. یعنی زمان ی وجود دارد که خورشید عمودی می‌تابد. این زمان الزاماً در انقلابِ تابستانی (یا زمستانی) نیست. در واقع از رابطه یِ بالا دیده می‌شود این زمان وقت ی است که

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \lambda. \tag{18}$$

اما این طولانی‌ترین روزِ سال نیست. طولانی‌ترین روزِ سال در انقلابِ تابستانی (یِ هر یک از نیم‌کره‌ها) است. در مدارها یِ رأس‌السرطان و رأس‌الجدی این دو نقطه (طولانی‌ترین روزِ سال و تابشِ عمودی یِ خورشید) یکی می‌شوند. با کاهشِ عرضِ جغرافیایی، ضمناً تغییراتِ طولِ روز کم می‌شود، پس اثرِ عمودی‌بودنِ تابشِ خورشید بر مقدارِ تابش ی که زمین دریافت می‌کند بیش‌تر می‌شود. در استوا فقط همین عامل مئثر است. پس بیش‌ترین مقدارِ تابش در استوا در اعتدالین است.

در شمالِ رأس‌السرطان ξ هرگز صفر نمی‌شود و کم‌ترین مقدارِ آن زمان ی است که α کمینه شود. در این حالت کمینه یِ ξ برابرِ $\lambda - \theta$ می‌شود. نتیجه این که روزِ بیش‌ترین تابش، در شمالِ رأس‌السرطان روزِ انقلابِ تابستانی است. از رأس‌السرطان به طرفِ جنوب، این روز به‌تدریج به طرفِ اعتدالالِ بهاری می‌رود تا در استوا درست اعتدلالِ بهاری می‌شود. اما در استوا، مقدارِ تابشِ خورشید در اعتدلالِ بهاری و اعتدلالِ پاییزی یک‌سان است. به‌طرفِ جنوب که برویم، روزِ بیش‌ترین تابش از اعتدالِ پاییزی به طرفِ انقلابِ زمستانی می‌رود، تا در رأس‌الجدی این روز دقیقاً انقلابِ زمستانی می‌شود. در جنوبِ مدارِ رأس‌الجدی، روزِ بیش‌ترین‌تابش همیشه روزِ انقلابِ زمستانی است. (انقلاب‌ها و اعتدلال‌ها برا یِ نیم‌کره یِ شمالی اند).

2 خم‌ها یِ محل ِ سایه در ناحیه‌ها یِ مختلف

رابطه‌ها یِ (15) جا یِ سایه رو یِ زمین را نشان می‌دهند. از این‌جا دو دسته خم به دست می‌آید: خم‌ها یِ روزثابت (یعنی خم‌ها یِ ϕ ثابت) و خم‌ها ی ساعت‌ثابت (یعنی خم‌ها یِ (ωt) ثابت). شکل ِ خم‌ها یِ ساعت‌ثابت ساده است. با حذف ِ α از رابطه‌ها یِ (15)، نتیجه می‌شود

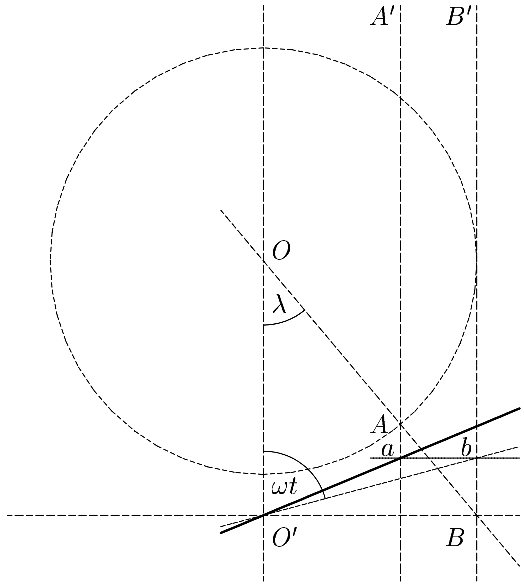
$$Y = -\cot\lambda + \frac{\cot\omega t}{\sin\lambda} X. \tag{19}$$

این‌ها یک دسته خط ِ راست اند، که همه از نقطه یِ $(0, -\cot\lambda)$ می‌گذرند. با به‌دست آوردن ِ این نقطه می‌شود عرض ِ جغرافیایی یِ محل را حساب کرد. بنابراین، اگر هدف فقط ساختن ِ یک ساعت ِ ساده (بدون ِ تقویم) باشد، کار بسیار آسان است. شکل ِ 5 روش ِ کار را نشان می‌دهد.

این خط‌ها در دو حالت ِ خاص از این هم ساده‌تر می‌شوند. در استوا $(\lambda = 0)$ خط‌ها یِ ساعت‌ثابت خط‌ها یی عمودی می‌شوند:

$$X = \tan\omega t. \tag{20}$$

در قطب‌ها، خط‌ها یِ ساعت‌ثابت خط‌ها یی شعاعی اند که فاصله یِ زاویه‌ای یِشان یک‌نواخت است، درست مثل ِ خط‌ها یِ ساعت ِ معمولی. تنهاتفاوت این است که این‌جا دایره یِ کامل 24 ساعت است نه 12 ساعت. ضمناً در قطب‌ها شمال و جنوب ِ مشخص ی وجود ندارد. در قطب ِ شمال همه یِ جهت‌ها جنوب است و در قطب ِ جنوب برعکس. در این‌جا ظهر هم خوش‌تعریف نیست، چون طول ِ سایه طی یِ روز تغییر نمی‌کند. به همین علت مبدئ ِ ساعت اختیاری است و تقارن ِ دایره‌ای یِ خط‌ها یِ ساعت‌ثابت (حول ِ میله) هم با این سازگار است.



شکلِ 5

از نقطه یِ O (جا یِ میله) خطِ شمالی‌ـ جنوبی یِ OO' را می‌کشیم. دایره ای به مرکزِ O و شعاعِ واحد (طولِ میله) می‌کشیم. نیم‌خطِ OB را با زاویه یِ λ (عرضِ جغرافیایی) نسبت به OO' می‌کشیم. این نیم‌خط دایره را در نقطه یِ A قطع می‌کند. از A خطِ شمالی‌ـ جنوبی یِ AA' را می‌کشیم. فاصله یِ A از خطِ OO' برابرِ $\sin\lambda$ است. مماسِ شمالی‌ـ جنوبی یِ BB' بر دایره را می‌کشیم. این مماس نیم‌خطِ OB را در نقطه یِ B قطع می‌کند. از نقطه یِ B خطِ شرقی‌ـ غربی یِ BO' را می‌کشیم. این خط OO' را در O' قطع می‌کند. طولِ OO' برابرِ $\cot\lambda$ است. تا این‌جا برا یِ هر ساعت ی یک‌سان است. از نقطه یِ O' خطِ $O'b$ را با زاویه یِ ωt نسبت به $O'O$ می‌کشیم. (t زمان نسبت به ظهر است.) این خط BB' را در b قطع می‌کند. از b خطِ شرقی‌ـ غربی یِ ba را می‌کشیم. این خط AA' را در a قطع می‌کند. خمِ ساعتِ t بخش ی از خطِ $O'a$ است.

شکلِ خم‌ها یِ روزثابت از این پیچیده‌تر است. چیز ی که به طورِ کلی می‌شود گفت این است که این‌ها با تبدیلِ $\phi \to \pi - \phi$ عوض نمی‌شوند. چون بسته‌گی یِ جای یِ سایه به ϕ تنها از طریقِ α است، که آن هم فقط به $\sin\alpha$ بسته‌گی دارد. شکلِ خمِ اعتدال ($\alpha = \pi/2$) هم ساده است. به ازا یِ این مقدارِ α،

$$X = \frac{\tan\omega t}{\cos\lambda},$$
$$Y = \tan\lambda. \tag{21}$$

این معادله یِ یک خطِ افقی است. حالا نمودارِ ساعت در پنج ناحیه یِ مختلف (استوا، حاره یِ شمالی، معتدلِ شمالی، قطبی یِ شمالی، و خودِ قطبِ شمال) را بررسی می‌کنیم.

2.1 استوا

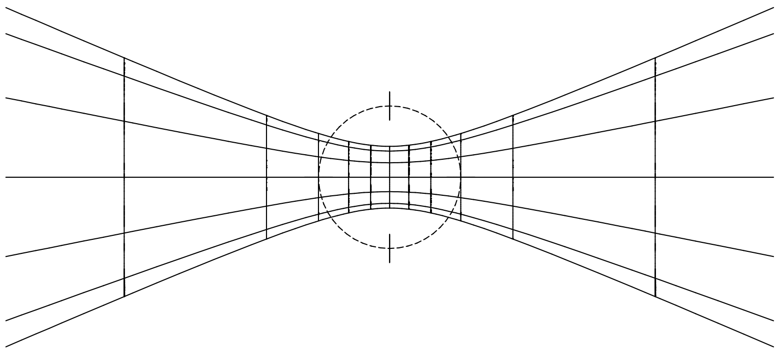
در این‌جا معادله‌ها یِ (15) می‌شوند

$$X = \tan\omega t,$$
$$Y = \frac{-\cot\alpha}{\cos\omega t}. \tag{22}$$

خم‌ها یِ روزثابت هذلولی اند:

$$Y = -\cot\alpha\sqrt{1+X^2}. \tag{23}$$

هیچ یک از این خم‌ها بسته نیست، که نشان می‌دهد خورشید هر روز طلوع و غروب می‌کند. وقتِ طلوع و غروب، سایه به بی‌نهایت (مجانبِ هذلولی‌ها) می‌گراید. شکلِ خم‌ها، هم نسبت به شرق و غرب متقارن است، و هم نسبت به شمال و جنوب. در ظهرِ روزها یِ اعتدال، خورشید کاملاً عمودی می‌تابد و طولِ سایه صفر می‌شود. در انقلاب‌ها، انحرافِ خورشید نسبت به حالتِ عمودی بیشینه و طولِ سایه هم بیشینه می‌شود. شکلِ 6 خم‌ها یِ ساعت‌ثابت و روزثابت در استوا را نشان می‌دهد.



شکلِ 6

خم‌ها یِ روزثابت و ساعت‌ثابت در استوا. جهتِ شمال رو به بالا است. خم‌ها یِ ساعت‌ثابت خط‌ها یِ عمودی اند. خطِ وسط ظهر است و خط‌ها یِ دیگر ساعت‌ها یِ 5- تا 5 (نسبت به ظهر)، یعنی هفتِ صبح تا پنجِ بعدازظهر. سایه پیش از ظهر در غرب (چپ) است و پس از ظهر به شرق (راست) می‌رود. خطِ افقی خطِ اعتدلال است. فاصله یِ زمانی یِ خم‌ها یِ روزثابت از هم یک ماه است. جنوبی‌ترین خم مربوط به انقلابِ تابستانی (یِ نیم‌کره یِ شمالی)، و شمالی‌ترین خم مربوط به انقلابِ زمستانی است. شعاعِ دایره یِ خط‌چین واحد (طولِ میله) است. خودِ میله هم در مرکزِ دایره است.

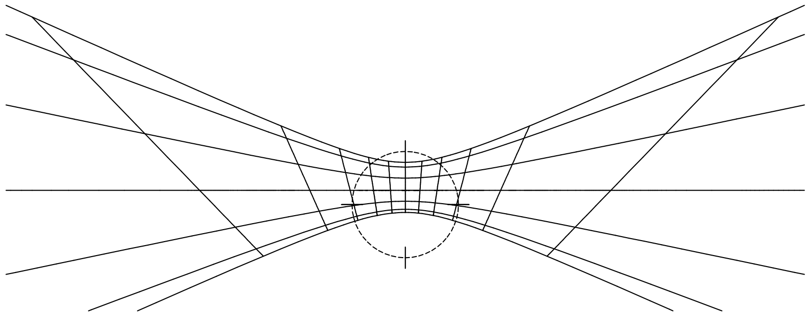
2.2 ناحیه یِ حاره یِ شمالی

هنوز هم همه یِ خم‌ها یِ روزثابت باز اند، یعنی خورشید هر روز طلوع و غروب می‌کند. ظهرِ دو روز است که خورشید عمودی می‌تابد. در این روزها

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \lambda, \tag{24}$$

و از آن‌جا

$$\sin\phi = \frac{\sin\lambda}{\sin\theta}. \tag{25}$$



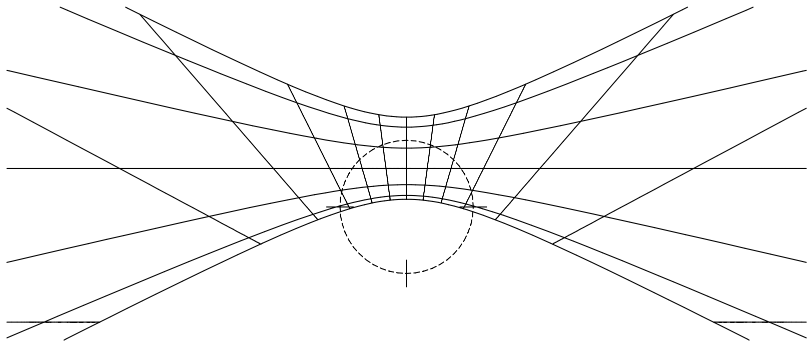
شکلِ 7

خم‌ها يِ روزثابت و ساعت‌ثابت در ناحیه يِ حاره يِ شمالی. جهتِ شمال رو به بالا است. خطِ عمودی يِ وسط خطِ ظهر است و خط‌ها يِ دیگر ساعت‌ها يِ 5- تا 5 (نسبت به ظهر)، یعنی هفتِ صبح تا پنجِ بعدازظهر. سایه پیش از ظهر در غرب (چپ) است و پس از ظهر به شرق (راست) می‌رود. خطِ افقی خطِ اعتدلال است. فاصله يِ زمانی يِ خم‌ها يِ روزثابت از هم یک ماه است. جنوبی‌ترین خم مربوط به انقلابِ تابستانی (يِ نیم‌کره يِ شمالی)، و شمالی‌ترین خم مربوط به انقلابِ زمستانی است. شعاعِ دایره‌ی خط‌چین واحد (طولِ میله) است. خودِ میله هم در مرکزِ دایره است. این شکل برا يِ عرضِ جغرافیایی يِ 15° کشیده شده.

یک ی از این روزها در بهار است $(\phi < \pi/2)$ و یک ی در تابستان $(\phi > \pi/2)$. بینِ این دوروز (از جمله در انقلابِ تابستانی) ظهرها خورشید در شمالِ آسمان است و سایه اَش در جنوب می‌افتد. هر چه به طرفِ شمال برویم، فاصله يِ این دوروز از هم کم‌تر می‌شود، تا در رأس‌السرطان دوروز رو يِ هم و رو يِ انقلابِ تابستانی می‌افتند. تقارنِ شمال– جنوب ی که در خم‌ها يِ استوا دیده می‌شد، این‌جا وجود ندارد. خم‌ها يِ شمالی (پاییز و زمستان) بزرگ‌تر اند، هر چند روزها يِ متناظر با این خم‌ها کوتاه‌تر اند.

2.3 ناحیه يِ معتدلِ شمالی

در این‌جا هم همه يِ خم‌ها يِ روزثابت باز اند، یعنی خورشید هر روز طلوع و غروب می‌کند. خورشید هرگز عمودی نمی‌تابد. انحرافِ خورشید از خطِ عمودی، در انقلابِ تابستانی کمینه می‌شود.



شکلِ 8

خم‌ها یِ روزثابت و ساعت‌ثابت در ناحیه یِ معتدلِ شمالی. جهتِ شمال رو به بالا است. خطِ عمودی یِ وسط خطِ ظهر است و خط‌ها یِ دیگر ساعت‌ها یِ 6- تا 6 (نسبت به ظهر)، یعنی ششِ صبح تا ششِ بعدازظهر. سایه پیش از ظهر در غرب (چپ) است و پس از ظهر به شرق (راست) می‌رود. خطِ افقی یِ بلند خطِ اعتدلال است. فاصله یِ زمانی یِ خم‌ها یِ روزثابت از هم یک ماه است. جنوبی‌ترین خم مربوط به انقلابِ تابستانی (یِ نیم‌کره یِ شمالی)، و شمالی‌ترین خم مربوط به انقلابِ زمستانی است. شعاعِ دایره یِ خط‌چین واحد (طولِ میله) است. خودِ میله هم در مرکزِ دایره است. این شکل برا یِ عرضِ جغرافیایی یِ 30° کشیده شده.

2.4 ناحیه یِ قطبی یِ شمالی

در این‌جا در بخش ی از سال خم‌ها یِ ساعت‌ثابت بسته اند، یعنی خورشید طلوع و غروب نمی‌کند. شرطِ این روی‌داد آن است که $\cos\xi$ به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ ωt مثبت بماند، یعنی

$$\sin\lambda\cos\alpha > |\cos\lambda\sin\alpha|. \qquad (26)$$

برا یِ ناحیه یِ قطبی یِ شمالی، $\lambda > 0$ و شرطِ بالا می‌شود

$$\alpha < \lambda, \qquad (27)$$

یا

$$\sin\phi > \frac{\cos\lambda}{\sin\theta}. \qquad (28)$$

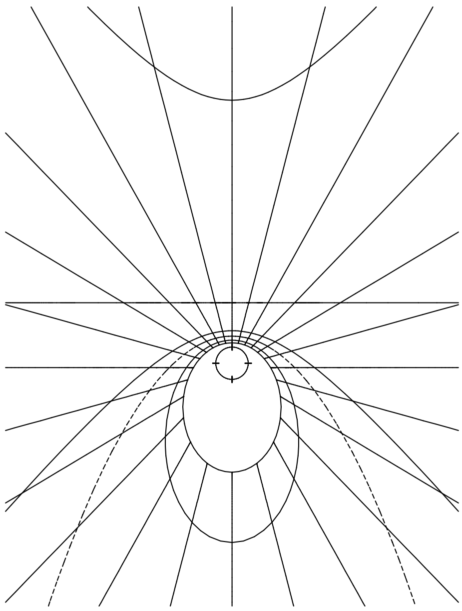
وسط ِ این بازه ي زمانی انقلاب ِ تابستانی است. معادله ي خم ِ مربوط به مرز ِ این شرط (تساوی در رابطه ي بالا) می‌شود

$$X = \frac{\sin \omega t}{\cos \lambda (1 + \cos \omega t)},$$
$$Y = \frac{\sin^2 \lambda \cos \omega t - \cos^2 \lambda}{\sin \lambda \cos \lambda (1 + \cos \omega t)}. \quad (29)$$

دوره ي مشابه ی هم حول ِ انقلاب ِ زمستانی است،

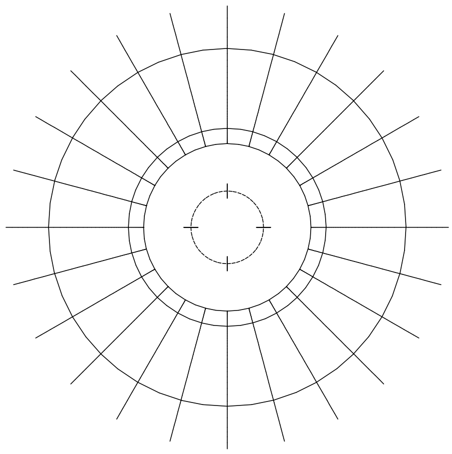
$$\sin \phi < -\frac{\cos \lambda}{\sin \theta}, \quad (30)$$

که طی ِ آن $\cos \xi$ مثبت نمی‌شود، یعنی شب ِ دائمی است.



شکل ِ 9
خم‌ها ي روزثابت و ساعت‌ثابت در ناحیه ي قطبی ي شمالی. جهت ِ شمال رو به بالا است. 24 خط ِ شعاعی خط‌ها ي ساعت‌ثابت اند. خط ِ عمودی ي وسط ِ شمالی خط ِ ظهر است و جهت ِ افزایش ِ ساعت ساعت‌گرد است. (این ساعت 24 شماره دارد نَه 12 تا، یعنی یک شبانه‌روز را می‌پوشاند. خم ِ خط‌چین ناحیه ي خم‌ها ي بسته (روزها ي دائمی) را از ناحیه ي خم‌ها ي باز جدا می‌کند. خط ِ افقی ي بلند خط ِ اعتدلال است. از خم‌ها ي روزثابت در نیمه ي دوم ِ سال فقط یک ی کشیده شده، خم ِ شمالی ِ مربوط به یک ماه پیش از اعتدلال ِ بهاری یا یک ماه پس از اعتدال ِ پاییزی. شعاع ِ دایره ي مرکزی واحد (طول ِ میله) است. خود ِ میله هم در مرکز ِ دایره است. این شکل برا ي عرض ِ جغرافیایی ي $75°$ کشیده شده.

در قطب ِ شمال، شکل‌ها از این هم ساده‌تر می‌شوند. خم‌ها ي ساعت‌ثابت خط‌ها ي شعاعی اند و خم‌ها ي روزثابت دایره‌ها ي متحدالمرکز.



شکل ِ 10
خم‌ها ي روزثابت و ساعت‌ثابت در قطب ِ شمال. خط‌ها ي شعاعی خم‌ها ي ساعت‌ثابت اند. جهت ِ افزایش ِ ساعت هم ساعت‌گرد است. در این‌جا ظهر خوش‌تعریف نیست. دایره‌ها (جز دایره ي خط‌چین) خم‌ها ي روزثابت اند. کوچک‌ترین ِ این‌ها به انقلاب ِ تابستانی مربوط است. فاصله ي زمانی ي این دایره‌ها از هم یک ماه است. دایره ي بیرونی مال ِ یک ماه پس از اعتدال ِ بهاری، یا یک ماه پیش از اعتدال ِ پاییزی است. شعاع ِ دایره ي خط‌چین واحد (طول ِ میله) است. خود ِ میله هم در مرکز ِ دایره است.

3 تنظیم ِ دقیق ِ ساعت

تا این‌جا در مدرج‌کردن ِ ساعت این فرض را به کار برده ایم که سرعت ِ زاویه‌ای ي خورشیدی ي چرخش ِ زمین ثابت است. این فرض دقیقاً درست نیست. اگر محور ِ چرخش ِ زمین بر صفحه ي مداری عمود می‌بود، این سرعت برابر ِ سرعت ِ زاویه‌ای ي نجومی ي چرخش ِ زمین منها ي سرعت ِ زاویه‌ای ي حرکت ِ مداری ي زمین می‌شد. اولی ثابت است ولی دومی ثابت نیست، چون مدار ِ زمین بیضی است. تغییرات ِ نسبی ي سرعت ِ زاویه‌ای ي مداری ي زمین از مرتبه ي e است. خود ِ سرعت ِ زاویه‌ای ي مداری حدود ِ 0.003 برابر ِ سرعت ِ زاویه‌ای ي چرخش ِ زمین است. به این ترتیب، تغییرات ِ نسبی ي سرعت ِ زاویه‌ای ي خورشیدی ي زمین از مرتبه ي 10^{-4} است. این متناظر است با تغییرات ِ طول ِ شبانه‌روز از مرتبه‌ی 5 ثانیه. اگر هدف مدرج‌کردن ِ ساعت با دقت ِ دقیقه باشد، این 5 ثانیه طی ِ یک شبانه‌روز مهم نیست. اما این 5 ثانیه‌ها با هم جمع می‌شود و باعث می‌شود زمان ِ ظهر از ساعت ِ 12 جابه‌جا شود. بیشینه ي این جابه‌جایی از مرتبه ي همین 5 ثانیه ضرب در 200 (نصف ِ تعداد ِ روزهای سال) است، که حدود ِ 15 دقیقه می‌شود. پس برا ي مدرج‌کردن ِ ساعت با دقت ِ دقیقه، باید این اثر را در نظر گرفت. جز این، عمودنبودن ِ محور ِ چرخش ِ زمین بر مدار َ ش هم باعث ِ تغییر ِ طول ِ شبانه‌روز طی ِ سال می‌شود.

معادله‌ی مدارِ زمین

$$s = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\phi-\phi_{\rm P})} \tag{31}$$

است، که در آن a نیم‌قطرِ بزرگِ بیضی، و s فاصله یِ زمین با خورشید است. مبدئِ سنجشِ زاویه یِ سمتی (نسبت به خورشید) اعتدالِ بهاری، و $\phi_{\rm P}$ زاویه یِ نقطه یِ حضیض است. سرعتِ زاویه‌ای یِ حرکتِ مداری از این رابطه به دست می‌آید.

$$s^2\dot\phi = l, \tag{32}$$

که در آن l ثابت است. معادله یِ (31) تا مرتبه یِ یک نسبت به e می‌شود

$$s = a[1-e\cos(\phi-\phi_{\rm P})]. \tag{33}$$

از این‌جا سرعتِ زاویه‌ای یِ مداری (تا مرتبه یِ یک نسبت به e) می‌شود

$$\Omega = \dot\phi = \frac{l}{a^2}[1+2e\cos(\phi-\phi_{\rm P})]. \tag{34}$$

ضریبِ کروشه سرعتِ زاویه‌ای یِ متوسط (Ω_0) است. پس

$$\begin{aligned}\Omega(T) &= \Omega_0[1+2e\cos(\phi-\phi_{\rm P})],\\ &= \Omega_0\{1+2e\cos[\Omega_0(T-T_{\rm P})]\}.\end{aligned} \tag{35}$$

Ω_0 برابر است با 2π تقسیم بر یک سال. T زمان از اعتدالِ بهاری است. $T_{\rm P}$ هم زمانِ حضیض است. رابطه یِ ϕ با T می‌شود

$$\phi(T) = \Omega_0 T + 2e\{\sin[\Omega_0(T-T_{\rm P})] + \sin(\Omega_0 T_{\rm P})\}. \tag{36}$$

به خاطرِ عمودنبودنِ محورِ چرخشِ زمین بر مدارَش، سرعتِ زاویه‌ای یِ خورشیدی تفاضلِ Ω از سرعتِ زاویه‌ای یِ نجومی یِ چرخشِ‌زمین نیست. سرعتِ زاویه‌ای یِ خورشیدی را از اختلافِ زمانی یِ دو ظهرِ متوالی تعریف می‌کنیم. فرض کنید در زمانِ T جهتِ خورشید $\hat{\rm s}_0$ است. از مرکزِ زمین بردار ی در جهتِ $\hat{\rm s}_0$ می‌کشیم. در این زمان، در محلِ برخوردِ این بردار با سطحِ زمین ظهر است. سرعتِ زاویه‌ای یِ نجومی یِ چرخشِ زمین را با $\tilde\omega$ نشان می‌دهیم. پس از گذشتِ زمانِ $2\pi/\tilde\omega$، این نقطه

در اثرِ چرخشِ زمین سرِ جا یِ خود َ ش بر می‌گردد، اما در این زمان جهتِ خورشید دیگر $\hat{\mathbf{s}}_0$ نیست. با فرضِ کوچک‌بودنِ سرعتِ زاویه‌ای یِ مداری یِ زمین به سرعتِ زاویه‌ای یِ چرخشِ آن (که فرضِ معقول ی است، چون نسبتِ این‌دو تقریباً 0.003 است) جهتِ جدیدِ خورشید

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_0 + \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}\Omega\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{s}}_0 \tag{37}$$

است. به این ترتیب، در این زمان در آن نقطه ظهر نیست. در زمانِ کوچکِ δt پس از این، نقطه یِ مشاهده یِ $\hat{\mathbf{s}}_0$ به خاطرِ چرخشِ زمین به نقطه یِ

$$\hat{\mathbf{s}}' = \hat{\mathbf{s}}_0 + \delta t\, \tilde{\omega}\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0 \tag{38}$$

رفته است. (نقطه یِ مشاهده در واقع رو یِ سطحِ زمین است، اما چون فقط جهتِ بردارِ نقطه یِ مشاهده مهم است، می‌شود آن را خودِ $\hat{\mathbf{s}}_0$ گرفت.) ظهر در این نقطه‌یِ‌مشاهده زمانی ی است که سه‌بردارِ $\hat{\mathbf{s}}$، $\hat{\mathbf{s}}'$، و $\hat{\mathbf{n}}$ در یک صفحه باشند، یعنی زمان ی که حاصلِ‌ضربِ سه‌تایی یِ این سه‌بردار صفر شود. این حاصلِ‌ضرب می‌شود

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}} &= \frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}}\hat{\mathbf{s}}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{s}}_0) + \tilde{\omega}\delta t(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0),\\ &= -\frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}}\hat{\mathbf{n}} \cdot [\hat{\mathbf{s}}_0 \times (\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{s}}_0)] + \tilde{\omega}\delta t(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{s}}_0),\\ &= -\frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}}\hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_3 - \hat{\mathbf{s}}_0\ \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) + \tilde{\omega}\delta t \sin^2\alpha,\\ &= -\frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}}\cos\theta + \tilde{\omega}\delta t \sin^2\alpha.\end{aligned} \tag{39}$$

از این‌جا δt برا یِ ظهر به دست می‌آید:

$$\delta t = \frac{2\pi\Omega}{\tilde{\omega}^2}\frac{\cos\theta}{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi}. \tag{40}$$

سرعتِ زاویه‌ای یِ خورشیدی (ω) را 2π تقسیم بر فاصله یِ دو ظهرِ متوالی تعریف می‌کنیم. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{(2\pi/\tilde{\omega}) + \delta t},\\ &= \tilde{\omega} - \frac{\tilde{\omega}^2\delta t}{2\pi},\\ &= \tilde{\omega} - \frac{\Omega\cos\theta}{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi}.\end{aligned} \tag{41}$$

دیده می‌شود که اگر $\theta=0$، طرف ِ راست $\Omega-\tilde\omega$ می‌شود و اگر $\theta=\pi$، طرف ِ راست $\Omega+\tilde\omega$ می‌شود، که همان چیز ی است که انتظار داریم.

تعداد ِ روزها یِ خورشیدی یِ یک سال می‌شود

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\tau \omega(T)\mathrm{d}T,\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\tilde\omega\tau-\int_0^\tau \frac{\Omega(T)\cos\theta}{1-\sin^2\theta\sin^2\phi(T)}\mathrm{d}T\right],\\
&= \tilde N-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta(1+\tan^2\phi)}{1+\cos^2\theta\tan^2\phi}\mathrm{d}\phi,\\
&= \tilde N-\frac{1}{2\pi}\tan^{-1}(\cos\theta\tan\phi)\Big|_0^{2\pi},\\
&= \tilde N-\mathrm{sgn}(\cos\theta).
\end{aligned}\tag{42}$$

توجه کنید که $\tan^{-1}$ در رابطه‌ها یِ بالا چندمقداری است. $\tan^{-1}(\cos\theta\tan\phi)$ در $\phi=0$ صفر است و نسبت به ϕ هم پیوسته است. τ دوره یِ حرکت ِ مداری یِ زمین (یک سال)، و $\tilde N$ تعداد ِ روزها یِ نجومی یِ سال است. از این‌جا سرعتِ‌زاویه‌ای یِ متوسط ِ خورشیدی می‌شود

$$\omega_0=\tilde\omega-\Omega_0\mathrm{sgn}(\cos\theta).\tag{43}$$

حالا می‌خواهیم ببینیم در زمان ِ T، اختلاف ِ زمان ِ استاندارد (بر اساس ِ یک ساعت برابر ِ یک بیست‌وچهار ُم ِ روز ِ متوسط ِ خورشیدی) با زمان ِ خورشیدی (بر اساس ِ جا یِ خورشید در آسمان) چه قدر است. هر دوزمان از فاز ِ چرخش ِ زمین به دست می‌آیند، اما یک ی با سرعت ِ زاویه‌ای یِ خورشیدی یِ متوسط و یک ی با سرعت ِ زاویه‌ای یِ خورشیدی یِ لحظه‌ای:

$$\int_0^T\omega(T')\mathrm{d}T'=\int_0^{T_0}\omega_0(T')\mathrm{d}T'=\int_0^{\tilde T}\tilde\omega(T')\mathrm{d}T'.\tag{44}$$

زمان ی که از ساعت ِ آفتابی خوانده می‌شود T_0 است. زمان ِ واقعی T است. اختلاف ِ این دوزمان تا مرتبه یِ یک می‌شود

$$\omega_0(T-T_0)+\int_0^T[\omega(T')-\omega_0]\mathrm{d}T'=0,\tag{45}$$

یا

$$T-T_0=\frac{1}{\omega_0}\{\tan^{-1}[|\cos\theta|\tan\phi(T)]-\Omega_0T\}\mathrm{sgn}(\cos\theta).\tag{46}$$

(چون این عبارت مرتبه‌یِ‌یک است، در طرفِ راست می‌شود T یا T_0 گذاشت.) طرفِ راستِ این عبارت در اعتدالِ بهاری صفر می‌شود. حالا فرض کنید در اعتدالِ بهاری، ظهر به اندازه یِ Δ_0 بعد از ساعتِ 12 باشد. این مقدار به ساعتِ قراردادی بسته‌گی دارد. به این ترتیب، اگر زمان ی که ساعتِ خورشیدی نشان می‌دهد T_0 باشد، زمانِ قراردادی (T') می‌شود

$$T' = T_0 + \frac{1}{\omega_0}\{\tan^{-1}[|\cos\theta|\tan\phi(T)] - \Omega_0 T\}\mathrm{sgn}(\cos\theta) + \Delta_0. \qquad (47)$$

برا یِ دو نقطه که ساعتِ رسمی یِشان یکی است، Δ_0 یک‌سان نیست و تفاوتِ Δ_0 برا یِ این دو نقطه به اختلافِ طولِ‌جغرافیایی یِ این دونقطه بسته‌گی دارد:

$$\Delta_0' - \Delta_0 = \frac{(\zeta' - \zeta)d_0}{2\pi}. \qquad (48)$$

در این‌جا ζ طولِ جغرافیایی یِ محل، و d_0 روزِ خورشیدی یِ متوسط (24 ساعت) است.

به رابطه یِ (46) بر گردیم. این رابطه را می‌شود این طور نوشت.

$$\begin{aligned} T - T_0 &= \frac{d_0}{2\pi}\{\tan^{-1}[|\cos\theta|\tan\phi(T)] - \phi\}\mathrm{sgn}(\cos\theta) + \frac{d_0}{2\pi}(\phi - \Omega_0 T)\mathrm{sgn}(\cos\theta),\\ &=: \Delta_1 + \Delta_2. \end{aligned} \qquad (49)$$

اگر مدارِ زمین دایره‌ای می‌بود، جمله یِ دوم صفر می‌شد. اگر محورِ چرخشِ زمین بر مدارِ آن عمود می‌بود، جمله یِ اول صفر می‌شد. با توجه به این که فاصله یِ زاویه‌ای یِ نقطه یِ حضیض از اعتدالِ بهاری حدودِ $\pi/2$ است، و با توجه به رابطه یِ (36)، بیشینه یِ جمله یِ دوم می‌شود

$$\begin{aligned} \Delta_{2\mathrm{m}} &\approx \frac{4e\, d_0}{2\pi},\\ &\approx 15\mathrm{min}. \end{aligned} \qquad (50)$$

برا یِ به‌دست‌آوردنِ بیشینه یِ جمله یِ اول مشتقِ آن نسبت به ϕ را صفر می‌گذاریم:

$$\frac{|\cos\theta|(1+\tan^2\phi)}{1+\cos^2\theta\tan^2\phi} = 1. \qquad (51)$$

نتیجه می‌شود

$$\tan^2\phi = \frac{1}{|\cos\theta|}, \qquad (52)$$

و از آن‌جا بیشینه یِ جمله یِ اول می‌شود

$$\begin{aligned}\Delta_{1\mathrm{m}} &= \left[\tan^{-1}\left(|\cos\theta|^{-1/2}\right) - \tan^{-1}\left(|\cos\theta|^{1/2}\right)\right]\frac{d_0}{2\pi},\\ &\approx 0.007 d_0,\\ &\approx 10\mathrm{min}.\end{aligned} \tag{53}$$

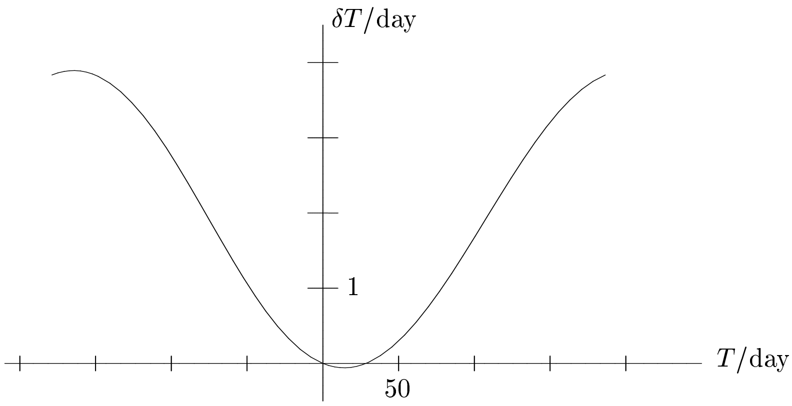
دیده می‌شود در موردِ زمین، اثرِ بیضی‌بودنِ مدارِ زمین و عمودنبودنِ محورِ چرخشِ آن بر مدارَ ش از یک مرتبه است.

اگر زاویه یِ محورِ چرخشِ یک سیاره با عمود بر مدارَ ش زیاد می‌شد (نزدیکِ 90 درجه) اتفاقِ جالب ی می‌افتاد. برا یِ ساده‌گی مدار را دایره می‌گیریم. داریم

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\tan^{-1}(\epsilon\tan\phi) = \begin{cases} 0, & 0<\phi<\pi/2\\ \pi, & \pi/2<\phi<3\pi/2\\ 2\pi, & 3\pi/2<\phi<2\pi\end{cases}. \tag{54}$$

معنی یِ این عبارت آن است که برا یِ چنین‌سیاره ای، از اعتدالِ بهاری تا انقلابِ تابستانی طولِ روز برابرِ روزِ نجومی است. طولِ روزِ انقلابِ تابستانی نصفِ روز (برا یِ $\theta > \pi/2$) یا یک و نیم روز (برا یِ $\theta < \pi/2$) است. پس از آن تا انقلابِ زمستانی طولِ روز برابرِ روزِ نجومی است، و در انقلابِ زمستانی دوباره همین روزِ غیرِعادی تکرار می‌شود. بینِ سیاره‌ها یِ منظومه‌یِ‌شمسی، وضعیتِ اُرانوس از همه یِ سیاره‌ها یِ دیگر به این وضعیت نزدیک‌تر است ($\theta \approx 98°$).

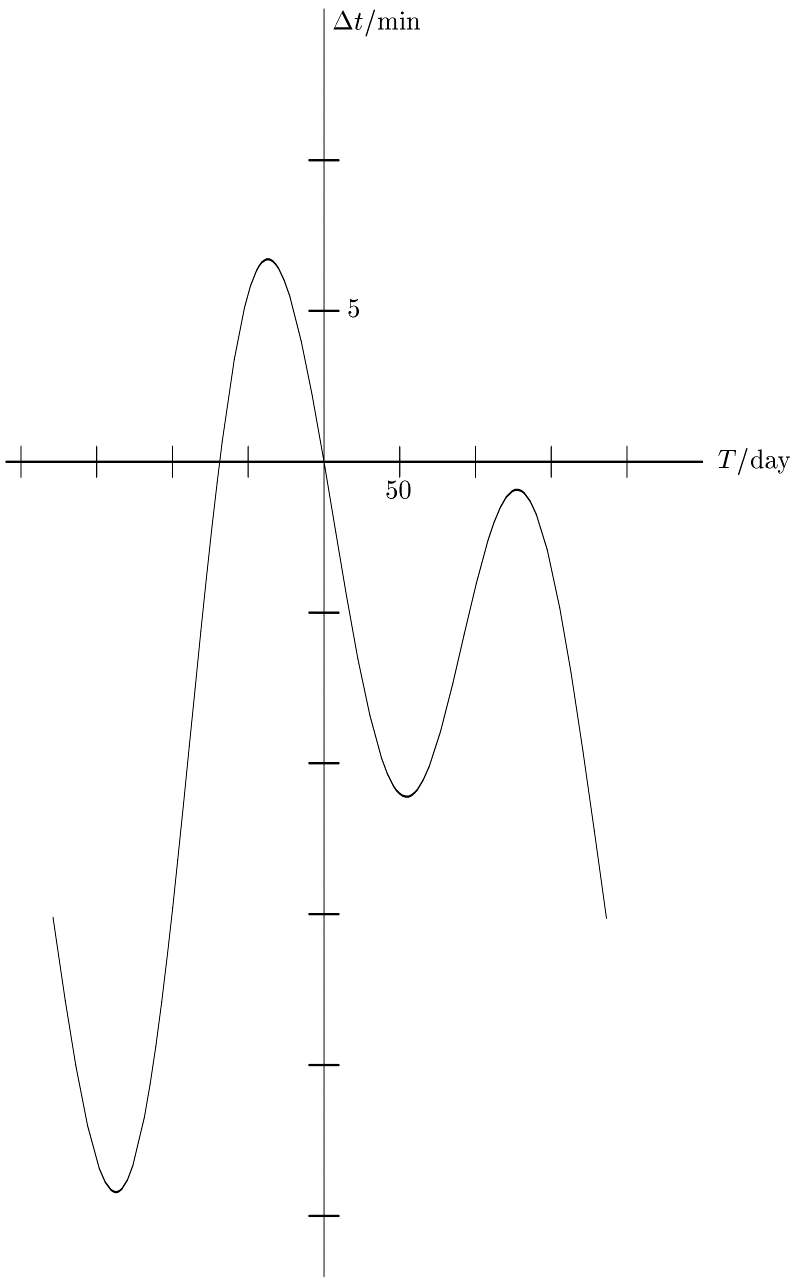
برا یِ تنظیمِ دقیقِ ساعت و تقویم، دو نمودار لازم است. یک ی نمودارِ انحرافِ تقویمِ واقعی از تقویمِ آفتابی بر حسبِ زمان، و دیگر ی نمودارِ انحرافِ ساعتِ واقعی از ساعتِ آفتابی. شکلِ 11 نمودارِ اول را نشان می‌دهد. معنی یِ این نمودار آن است که اگر روزِ خوانده‌شده از رو یِ ساعتِ آفتابی T باشد، باید مقدارِ δT را به آن افزود تا روزِ واقعی به دست آید.



شکلِ 11

نمودارِ تقویمِ واقعی منها یِ تقویمِ آفتابی، بر حسبِ زمان.

شکلِ 12 نمودارِ انحرافِ ساعتِ واقعی از ساعتِ خورشیدی را نشان می‌دهد. معنی یِ این نمودار آن است که اگر ساعتِ آفتابی زمانِ t را نشان دهد، باید به آن مقدارِ Δt را افزود تا ساعتِ واقعی به دست آید. البته به جز این، باید مقدارِ Δ_0 را هم افزود تا ساعتِ رسمی به دست آید. مقدارِ Δ_0 قراردادی است، و در واقع برابر است با زمانِ رسمی یِ ظهرِ آفتابی در محل منها یِ ساعتِ دوازدهِ ظهر، در روزِ اعتدالِ بهاری.



شکلِ 12

نمودارِ ساعتِ واقعی منهایِ ساعتِ آفتابی، بر حسبِ زمان.

4 دستورالعمل برا یِ ساختنِ ساعتِ آفتابی

- یک ناحیه یِ هم‌وارِ افقی یِ آفتاب‌گیر پیدا کنید. افقی‌بودن را می‌شود با مثلاً ترازِ آبی امتحان کرد. آفتاب‌گیربودن هم نوعاً یعنی این که جنوبِ این ناحیه باز باشد (در ناحیه یِ معتدلِ شمالی، از جمله ایران).

- یک میله را به طورِ عمودی نصب کنید، چنان که سایه یِ میله کاملاً رو یِ بخشِ هم‌وارِ ناحیه یِ افقی بیفتد. در ناحیه یِ معتدلِ شمالی، این یعنی اطرافِ میله در جهتِ شمال و شرق و غرب تا فاصله یِ چندبرابرِ طولِ میله باز باشد، یعنی به‌تر است میله در جنوبِ ناحیه یِ افقی نصب شود. با استفاده از رابطه یِ (19) یا با استفاده از روشِ هندسی یِ شکلِ 5، خم‌ها یِ تقریبی یِ ساعت‌ثابت را بکشید.

اگر فقط ساعتِ بی‌تقویمِ تقریبی (تا حدِ نیم‌ساعت دقت) می‌خواهید، کار تمام است. در غیرِ این صورت،

- در رابطه یِ (15) به جا یِ λ عرضِ جغرافیایی یِ محل را بگذارید و α را مقدارِ ثابت ی بگیرید. معادله یِ پارامتری یِ خمِ روزثابت به دست می‌آید. پارامتر ωt است، و α از رابطه یِ (4) به دست می‌آید، که در آن ϕ زاویه یِ خطِ واصلِ زمین به خورشید با زاویه یِ این خط در اعتدالِ بهاری است، و $\theta = 23°27'$. تقویمِ تقریبی چنین به دست می‌آید که گذشتِ هر ماه برابر است با افزایشِ ϕ به مقدارِ $\pi/6$ (یا 30 درجه). این کار را برا یِ مقدارها یِ مختلفِ ϕ انجام دهید. نتیجه برا یِ ایران چیز ی شبیهِ شکلِ 8 خواهد شد. (این شکل خم‌ها یِ ساعت‌ثابت را هم دارد.)

- با استفاده از شکلِ 11، می‌شود تقویمِ دقیق را از رو یِ تقویمِ تقریبی به دست آورد.

- زمانِ رسمی یِ ظهرِ آفتابی در روزِ اعتدالِ بهاری در محل را به دست آورید. برا یِ این‌کار می‌توانید وقت ی ساعتِ آفتابی دوازدهِ ظهر را نشان می‌دهد ساعتِ رسمی را بخوانید. این مقدارِ Δ_0 را می‌دهد.

- با استفاده از نمودارِ شکلِ 12، می‌شود ساعتِ دقیق را از روی ساعتِ تقریبی به دست آورد. (به عددهای این نمودار باید مقدارِ Δ_0 را هم افزود.)