FAT-104

یادداشتی بر ناورداهای ـِ بی‌دررو

امیرحسین ـِ فتح‌اللهی

fatho@mail.cern.ch

چکیده: در این مقاله پس از یادآوری صورتِ قضیه‌ی ناورداهای بی‌دررو، برای به‌ترفهمیدنِ این قضیه مثال‌ها یی ارائه می‌شود.

0 مقدمه

روش‌های اختلالی، در حلِ مسائلِ فیزیک نقشِ بسیارمهم ی دارند. علتِ این موضوع آن است که نسبتِ تعدادِ مسئله‌ها یی که بتوان آنها را دقیق حل کرد به کلِ مسئله‌ها، کسرِ بسیار کوچک ی است (در واقع صفر است!). اما تصادفاً، یا شاید از بختِ خوب، از مکانیکِ سماوی گرفته تا مکانیکِ اتمی و زیراتمی، خیل ی از مسئله‌های مفید یک انحرافِ کوچک از یک مسئله‌ی دقیقاًحل‌پذیر اند. درست همین جا است که اهمیتِ روش‌های اختلالی معلوم می‌شود. در این مقاله می‌خواهیم مرور ی بر یک ی از قضیه‌های مشهور در روش‌های اختلالی کنیم: قضیه‌ی ناورداهای بی‌دررو.

یک سیستمِ دینامیکی را در نظر بگیرید که یک درجه‌ی آزادی دارد و حرکتِ آن دوره‌ای است. فرض می‌کنیم انرژیِ این سیستم پایسته است. مکانِ متناظر با این درجه‌ی آزادی را با q، و تکانه‌ی نظیرِ آن را با p نشان می‌دهیم؛ متغیرهای کانونیک می‌شوند (q,p). برای این سیستم متغیرِ کنش را به صورتِ

$$J := \oint p\, dq, \qquad (1)$$

تعریف می‌کنیم، که در آن انتگرال‌گیری روی یک دوره‌ی کامل است. این یعنی J عبارت است از مساحت ِ ناحیه‌ی محدود به مسیر ِ حرکت در فضای فاز. روشن است که در یک حرکت ِ دوره‌ای با انرژی ِ پایسته، J یک ثابت ِ حرکت است. مثلاً J را برای نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ حساب می‌کنیم. از همیلتونی ِ نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 = E \ (\text{انرژی}) \tag{2}$$

به دست می‌آید

$$p = \pm\sqrt{2mE - m^2\omega_0^2 q^2}, \qquad -\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \leq q \leq \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}. \tag{3}$$

توجه می‌کنیم که خم ِ p بر حسب ِ q یک بیضی است. از این‌جا به‌ساده‌گی می‌توان J را حساب کرد:

$$J = \oint p\, dq = 2\int_{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}} \sqrt{2mE - m^2\omega_0^2 q^2}\, dq = \frac{2\pi E}{\omega_0}, \tag{4}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود مقدار ِ J، که مساحت ِ بیضی است، مانند ِ انرژی پایسته است.

حال سیستم ی را در نظر بگیرید که با یک پارامتر مثل ِ a مشخص می‌شود؛ به‌طور ی که اگر a ثابت باشد (یعنی مشتق ِ زمانی ِ a صفر باشد) این سیستم حرکت دوره‌ای و انرژی ِ پایسته دارد. روشن است که اگر a ثابت باشد، J نیز ثابت می‌ماند. پرسش ِ جالب این است که اگر a ثابت نباشد، ولی به کُندی و پیوسته‌گی تغییر کند، در مورد ِ این سیستم چه می‌توان گفت. در این‌جا قضیه‌ی ناورداهای بی‌دررو وارد می‌شود، که می‌گوید

قضیه: برای سیستم ی که اگر پارامتر ِ a ثابت باشد پایستار و دوره‌ای است، میان‌گین ِ مشتق ِ زمانی ِ J (یعنی $\overline{\dot J}$) جمله‌ی شامل ِ توان ِ اول ِ $\dot a$ ندارد، یعنی اولین‌جمله‌های غیر ِصفر ِ آن از نوع ِ توان ِ اول ِ $\ddot a$ یا توان ِ دوم ِ $\dot a$ اند.

به عبارت ِ دیگر، از آن‌جا که داریم $J(t=T) = J(0) + \overline{\dot J}\cdot T$، اگر تغییرات ِ a پیوسته و به قدری کُند باشد که بتوان از $\ddot a$ و توان ِ دوم ِ $\dot a$ چشم پوشید، مقدار ِ J در پایان ِ دوره همان مقدار ِ J در آغاز ِ دوره است. البته توجه داریم که حرکت ِ جدید دیگر دوره‌ای نیست. منظور از $J(t_0)$ این است که $q(t_0)$ و $p(t_0)$ را به عنوان ِ شرط ِ اولیه برای تحول ِ سیستم ی با همیلتنی ِ H_0 در نظر بگیریم. H_0 یعنی همیلتنی ِ مستقل‌اززمان ی که در آن به‌جای $a(t)$ گذاشته ایم $a(t_0)$. سپس مقدار ِ $J(t_0)$ را با این همیلتنی و شرط ِ اولیه حساب کنیم.

ضمناً منظور از پایان ِ دوره‌ی حرکت هم پایان ِ دوره‌ای است که با همین شرط ِاولیه و همیلتنی ِمستقل‌اززمان به دست می آید. در واقع اگر تغییر ِ a کند و پیوسته باشد، حرکت تقریباً دوره‌ای است.

اثبات ِ قضیه‌ی ناورداهای ِ بی‌دررو در حالت ِ کلی، با استفاده از متغیرهای کنش_ زاویه و تبدیل ِ کانونیک ِ بین ِ مختصه‌های اولیه و مختصه‌های کنش_ زاویه انجام می‌شود [1]. در این یادداشت می‌خواهیم درستی ِ این قضیه را در دو مثال و با محاسبات صریح نشان دهیم.

1 نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ

مثال‌های متعدد ی از سیستم‌های با حرکت ِ نوسانی هم‌آهنگ می‌شناسیم: جرم‌وفنر، آونگ ِ کم‌دامنه، و $\cdots$. هر یک از این سیستم‌ها یک بس‌آمد ِ مشخصه، و چیز ی شبیه به جرم دارند، که از روی پارامترهای سیستم تعیین می‌شوند. همیلتنی ِ چنین‌سیستم‌ها یی به این شکل است.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \tag{5}$$

(توجه داریم که بعد ِ m لزوماً بعد ِ جرم ِ معمولی نیست، اما بعد ِ ω همیشه عکس ِ بعد ِ زمان است.) تغییر ِ این پارامترها به تغییر ِ بس‌آمد ِ مشخصه و جرم منجر می‌شود. مثلاً در سیستم ِ جرم‌وفنر، تغییر ِ جرم یا ضریب ِسختی ِ فنر باعث ِ تغییر ِ بس‌آمد ِ مشخصه می‌شود. در مورد ِ آونگ هم تغییر ِ طول ِ آونگ باعث ِ تغییر ِ بس‌آمد ِ مشخصه و پارامتر ِ شبه ِجرم ِ سیستم می‌شود [2]. به این‌ترتیب، همیلتنی ِ سیستم ِ نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ ی با پارامترهای متغیر را می‌شود چنین نوشت.

$$H(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)q^2 = E(t). \tag{6}$$

قبلاً رابطه‌ی J با E و ω به ازای پارامترهای ثابت را دیدیم، (4). می‌خواهیم نشان دهیم میان‌گین ِ $J = 2\pi E(t)/\omega(t)$، تا مرتبه‌ی یک از $\dot\omega$ و $\dot m$ و با چشم‌پوشی از مشتق‌های بعدی ِ ω و m ثابت می‌ماند. داریم

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{dH(t)}{dt} = \frac{\partial H(t)}{\partial t}, \tag{7}$$

و از آن‌جا

$$\frac{dE(t)}{dt} = m\omega\dot{\omega}q^2 + \frac{\dot{m}}{2}\left(\omega^2 q^2 - \frac{p^2}{m^2}\right). \tag{8}$$

(برای به‌دست‌آوردن ِ این رابطه، ضمناً می‌شود مستقیماً از E مشتق گرفت و با استفاده از معادله‌ی حرکت جمله‌های اضافی را حذف کرد.) سرانجام نتیجه می‌شود

$$\frac{dJ}{dt} = 2\pi\left(\frac{\dot{m}}{m\omega} + \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right)\left(\frac{m\omega^2 q^2}{2} - \frac{p^2}{2m}\right). \tag{9}$$

حالا تغییر ِ J طی ِ یک دوره ($T = 2\pi/\omega$) را حساب می‌کنیم. برای این کار باید از عبارت ِ بالا انتگرال بگیریم. با چشم‌پوشی از مشتق‌های دوم‌به‌بالای پارامترها، و توان‌های بیش‌ازیک ِ مشتق ِ اول پارامترها، می‌شود دوره‌ی حرکت و بسته‌گی ِ زمانی q و p را مثل ِ حرکت ِ نوسانی ِ با پارامترهای ثابت، و نیز $\dot{m}$ و $\dot{\omega}$ را ثابت گرفت (همه‌ی این‌ها برای یک دوره‌ی حرکت). مثلاً دامنه‌ی حرکت را q_0 می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \int_0^T q^2(t)dt &= \frac{q_0^2}{4\pi\omega} \\ \int_0^T p^2(t)dt &= \frac{m^2\omega^2 q_0^2}{4\pi\omega}, \end{aligned} \tag{10}$$

که از آن معلوم می‌شود انتگرال ِ عامل ِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (9) صفر است، یعنی

$$J(T) = J(0). \tag{11}$$

2 ذره‌ی آزاد بین ِ دو دیوار

سیستم ی شامل ِ دو دیوار با جرم ِ بی‌نهایت را در نظر بگیرید، که ذره ای به جرم ِ m بین ِشان رفت‌وآمد می‌کند. ذره آزاد است و فقط هر بار که به یک دیوار می‌رسد، به طور ِ کش‌سان با آن برخورد می‌کند. اگر دیوارها ساکن و در فاصله‌ی L از هم باشند، حرکت ِ ذره دوره‌ای و با دوره‌ی $T = 2L/v$ است، که در آن v سرعت ِ ذره است. برای به‌دست‌آوردن ِ J، تکانه را بر حسب ِ مکان رسم می‌کنیم؛ یک مستطیل به دست می آید که مساحت ِ آن J است:

$$J = \oint p\, dq = 2mvL. \tag{12}$$

با یادآوری ِ این که انرژی ِ ذره $E = mv^2/2$ است، نتیجه می‌شود

$$J = \frac{2E}{\nu}, \tag{13}$$

که در آن $\nu =: 1/T$. حالا فرض کنید دیوارها به‌آرامی حرکت کنند. مثلاً فرض کنید یک ی از دیوارها با سرعت ِ کم ِ u حرکت می‌کند، چنان که $u \ll v$. با حرکت ِ دیوار، حرکت دیگر دوره‌ای نیست، گرچه انتظار می‌رود اگر u کم باشد حرکت تقریباً دوره‌ای بماند.

برای محاسبه‌ی تغییرات ِ J، فرض کنید ذره در زمان ِ 0 با سرعت ِ $v(0)$ از دیوار ِ ساکن جدا شود. داریم

$$J(0) = 2mv(0)L(0), \tag{14}$$

که در آن $L(0)$ فاصله‌ی دو دیوار در $t = 0$ است. وقت ی ذره از دیوار ِ متحرک وا می‌جهد، سرعت ِ آن می‌شود

$$v = v(0) - 2u. \tag{15}$$

یک راه ِ ساده‌ی دیدن ِ این نتیجه آن است که به چارچوب ی برویم که با سرعت ِ u حرکت می‌کند. سرعت ِ ذره، از این پس تا پایان ِ دوره‌ی حرکت ثابت می‌ماند. اما در پایان ِ دوره‌ی حرکت، فاصله‌ی دودیوار

$$L(T) = L(0) + Tu = L(0)\left(1 + \frac{2u}{v(0)}\right) \tag{16}$$

است، که در آن از مشتق‌های u (یعنی مشتق‌های دوم‌به‌بالای فاصله‌ی دیوارها) چشم‌پوشی شده، و تا مرتبه‌ی یک نسبت به u، می‌شود به جای T هم $T(0)$ گذاشت. به این ترتیب، از (12)، (15)، و (16) دیده می‌شود تا مرتبه‌ی یک نسبت به سرعت ِ دیوار و با چشم‌پوشی از مشتق‌های بالاتر ِ فاصله‌ی دیوارها،

$$J(T) = J(0). \tag{17}$$

3 کندبودن ِ تغییر ِ پارامتر

حرکت ِ دوره‌ای ِ سیستم یک بس‌آمد دارد. تابع ِ پارامترهای متغیر بر حسب ِ زمان هم شامل ِ بس‌آمدها یی است. کندبودن ِ تغییر ِ پارامترها یعنی این بس‌آمدها خیل ی کوچک‌تر از بس‌آمدهای حرکت ِ دوره‌ای ِ سیستم باشند؛ به‌ویژه، تغییر ِ پارامتر و حرکت ِ دوره‌ای ِ سیستم هم‌بسته نباشند [3]، یعنی بس‌آمد ِ مشترک نداشته باشند. اگر چنین باشد، ممکن است تغییر ِ پارامتر مثل ِ یک عامل ِ تشدیدزا رفتار کند و در این صورت حکم ِ قضیه برقرار نخواهد بود. در مثال ِ آونگ، اگر تغییر ِ طول ِ نخ مثلاً در انتهای ِ هر رفت‌وبرگشت (بیشینه‌ی دامنه) انجام شود، بس‌آمد ِ این تغییر با بس‌آمد سیستم هم‌خوانی دارد و می‌توان دید که دیگر J ثابت نمی‌ماند. در مثال ِ دیوار هم، اگر دیوار ِ متحرک فقط وقت ی حرکت کند که ذره از آن دور باشد، سرعت ِ ذره عوض نمی‌شود، چون برخورد ِ آن همیشه با دیوار ِ ساکن است، اما L عوض می‌شود. پس J هم عوض می‌شود. در این‌جا هم بس‌آمد ِ حرکت ِ دوره‌ای ِ سیستم، در تابع ِ تغییر ِ پارامتر هم وجود دارد.

قدردانی: نویسنده از توضیحات ِ خرمی و شریعتی تشکر می‌کند.

4 یادداشت‌ها و مرجع‌ها

[1] H. Goldstein; "Classical mechanics", 2nd edition (Addison-Wesley, 1980) section 11-7

[2] متغیر ِ دینامیکی ِ سیستم ِ آونگ (در صفحه) زاویه‌ی ریسمان نسبت به نقطه‌ی آویز است. همیلتنی ِ آونگ ِ کم‌دامنه می‌شود

$H = (2ml^2)^{-1}p_\theta^2 + (mgl/2)\theta^2$

که m جرم ِ وزنه، l طول ِ ریسمان، و g شتاب ِ گرانش است. با مقایسه با همیلتنی ِ (5)، معلوم می‌شود پارامتر ِ شبه ِجرم ml^2، و بس‌آمد $(g/l)^{1/2}$ است. بنابراین تغییر ِ طول ِ ریسمان، هم بس‌آمد را عوض می‌کند هم پارامتر ِ شبه ِجرم را.

[3] V. I. Arnold; "Mathematical methods of classical mechanics", (Springer Verlag, 1978) section 52