FAT-105

چرا F=ma؟

امیرحسین ِ فتح‌اللهی

fatho@mail.cern.ch

چکیده: در این یادداشت بحثی برای موجه بودن ِ قانون ِ F=ma ارائه می‌شود.

بر طبق ِ مکانیک ِ نیوتن، ذره‌ای به جرم ِ ثابت ِ m تحت ِ تاثیر ِ نیروی $\vec{F}$ با شتاب ِ $\vec{a}=\vec{F}/m$ حرکت می‌کند، و همه می‌دانیم شتاب مشتق ِ دوم ِ مکان $\vec{x}(t)$ نسبت به زمان است: $\vec{a}=d^2\vec{x}(t)/dt^2$. این رابطه به عنوان ِ اصل بیان می‌شود، و البته همانند ِ هر اصل ِ دیگری احتیاج به اثباتی برای ِ درستی ندارد! اما آیا این اصل موجه است (فعلاً به نتایجی که از مکانیک ِ کوانتمی و نسبیتی بیرون می‌آید کاری نداریم)؟ با تجربه‌ی تقریباً سیصد ساله‌ای که از فیزیک داریم ممکن است جواب بدهیم «بله»، که البته جواب ِ درستی است. پس مهم‌ترین پشتوانه‌ی اصل ِ بالا آزمایش و مشاهده است. اما نکته‌ای در رابطه‌ی بالا وجود دارد که بحث بیشتر در مورد ِ توجیه ِ آن را بی‌فایده نمی‌کند، و آن وجود ِ موجودی به نام ِ نیرو، یعنی $\vec{F}$ است. فرض کنید که رابطه‌ی بالا را برای اولین بار دیده‌اید و می‌خواهید حرکت ِ ذره‌ای را، که تحت ِ تاثیر ِ تعداد ِ زیادی وسایل ِ اطراف ِ خود و احتمالاً زمین و خورشید و ماه و ... است، به دست آورید. سوال این است: برای $\vec{F}$ چه می‌گذارید؟ بدون ِ شک با مشکل مواجه خواهید شد — امتحان کنید! اتفاقی که در بسیاری از موارد افتاده این است که در واقع با خود ِ اصل بالا نیروها شناخته شده‌اند — به این معنا که با بررسی حرکت ِ یک «ذره‌ی آزمون» در هر مورد سعی شده است تا نیروهای ِ موثر شناخته شوند. برای مثال، با مطالعه‌ی سقوط ِ آزاد ِ یک جرم در نزدیکی ی ِ سطح ِ زمین و خلاء، متوجه شدند که نیروی ِ مربوطه را باید mg و به طرف ِ زمین گرفت! به طور ِ خلاصه، وضعیت به این گونه است که برای به دست آوردن شتاب ِ یک ذره باید نیرویی در رابطه‌ی نیوتن

گذاشت که «می‌دانیم شتابِ صحیح را خواهد داد!». این مطلب برای نیروهای قیدی (مثلِ کششِ نخ و عکس‌العمل سطح) به این شکل است که در واقع «شتاب ذره نیرویِ قیدی را تعیین می‌کند!». این واقعیت ممکن است باعث شود ابهتِ اصلِ بالا، و در نتیجه اهمیتِ کار نیوتن به شدت در چشمِ شما اُفت کند. اما چون ما طرف‌دارِ نیوتن هستیم، در این یادداشت سعی می‌کنیم تا حداقل مقداری از این ابهت و اهمیت را بازیابیم [1]. تا جایی که به حرکت‌شناخت مربوط می‌شود جایِ ذره بر حسب زمان (یعنی $\vec{x}(t)$) کمیتِ موردِ سوال است، که البته با دانستنِ آن سرعت و شتاب و ... ذره نیز با تعدادِ مناسب مشتقِ زمانی به دست می‌آیند. از طرفِ دیگر، تا جایی که به بحث معادلاتِ دیفرانسیل مربوط می‌شود، رابطه‌ی پیشنهادی نیوتن یک معادله‌ی دیفرانسیلِ درجه‌ی دو برای $\vec{x}(t)$ به شکلِ $\vec{F}=m\vec{a}$ است، که در آن نیرو می‌تواند تابعی از مکان، سرعت و زمان باشد، یعنی $\vec{F}=\vec{F}(\vec{x},\vec{v},t)$. این معادله‌ی دیفرانسیل با دو مقدارِ ثابت، که می‌توانند مکان و سرعتِ اولیه باشند، حل می‌شود.

فرض کنید شما هم بخواهید مانندِ نیوتن یک مکانیک ابداع کنید. اولین قدمِ بسیار بزرگ [2] این است که فرض کنید بینِ چگونه‌گی حرکت همه‌ی اجسام، خواه خورشید و خواه ذراتِ گردوغبار، و تاثیراتِ محیطِ اطرافِ آن‌ها می‌شود یک رابطه را برقرار دانست، به طوری که با استفاده از آن رابطه حرکتِ اجسام را بتوان پیش‌بینی کرد. توجه شما را به این نکته باید جلب کرد که مکانیکِ شما اگر واجدِ قابلیتِ فوق‌الذکر نباشد فوراً از گردونه‌ی رقابت با مکانیکِ نیوتن خارج می‌شود. قدمِ بعدی این خواهد بود که شما هم، مانندِ نیوتن، رابطه‌ای پیش‌نهاد کنید. برای شروع به رده‌ای از رابطه‌ها به شکلِ عمومی:

$$\vec{F}_{(n)} = m\frac{d^n\vec{x}(t)}{dt^n}, \tag{1}$$

که در آن تابعیتِ $\vec{F}_{(n)}$ به شکلِ

$$\vec{F}_{(n)} = \vec{F}_{(n)}(\vec{x},\frac{d\vec{x}}{dt},\cdots,\frac{d^{n-1}\vec{x}}{dt^{n-1}},t) \tag{2}$$

است اشاره می‌کنیم. توجه می‌کنیم که برای $n=2$ و فرض این‌که $\vec{F}_{(2)}(\vec{x},\frac{d\vec{x}}{dt},t)$ «نیرویِ نیوتن» است، رابطه‌ی پیش‌نهادی همان رابطه‌ی نیوتن است. هم‌چنین در این گونه از روابط ما فرض کرده‌ایم که پارامترِ جرم، به عنوانِ خاصیتی که همه‌ی «اجرام» دارند، نقشِ یکسانی را اجرا می‌کند. به این سوال که در روابطِ بالا به جای $\vec{F}_{(n)}$ چه باید گذاشت، تا حدِ زیادی، می‌توان به همان شکل که در مورد رابطه‌ی نیوتن پاسخ داده

می‌شود جواب داد. در واقع الان، یعنی بعد از حدود ِ سه قرن، ما یک جواب ِ حاضر و آماده برای این پرسش داریم: برای نوع ِ (n)اُم از روابط بالا کافی است از نیروهایی که در رابطه‌ی نیوتن جواب ِ درست می‌دهند $n-2$ بار نسبت به زمان مشتق گرفت تا $\vec{F}_{(n)}$ به دست آید؛ یعنی داریم:

$$\vec{F}_{(n)}(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}\vec{x}}{dt^{n-1}}, t) = \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}\left(\vec{F}_{(2)}(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}, t)\right). \tag{3}$$

به عبارت ِ دیگر، با انتخاب ِ بالا کافی است از معادله‌ی نوع ِ (n)اُم $n-2$ بار انتگرال گرفت تا به رابطه‌ی نیوتن برسیم. تنها نکته‌ای که در این‌جا می‌ماند این است که با هر بار انتگرال‌گیری یک ثابت به معادله اضافه می‌شود، که می‌شود دید همیشه می‌توان این ثابت‌ها را طوری جفت‌وجور کرد که جواب ِ نهایی همان رابطه‌ی نیوتن باشد [3]. پس حداقل برای وقتی که $n > 2$، البته با کمی اضافه‌کاری، در واقع به رابطه‌ی نیوتن می‌رسیم.

پیش از پرداختن به حالت ِ $n = 1$، ارائه‌ی یک تعبیر ِ دیگر از آنچه در بالا گفته شد ممکن است مفید باشد. برای حل یک معادله‌ی دیفرانسیل ِ مرتبه‌ی n، به تعداد ِ n ثابت، که ممکن است ثابت ِ انتگرال‌گیری نامیده شوند و معمولاً مقدار ِ تابع ِ مجهول و $n-1$ مشتق‌اش در نقطه‌ی اولیه هستند نیاز است. در مثال ِ ما این n ثابت معمولاً $\vec{x}(t)$ و $n-1$ مشتقات ِ زمانی‌اش در لحظه‌ی اولیه، مثلاً t_0 است. همان‌طور که در بالا اشاره کردیم در مورد خاص ِ مکانیک ِ ذرات تعداد ِ $n-2$ تا از این ثابت‌ها با استفاده از مکانیک ِ نیوتنی مقادیر ِ مشخصی هستند، و این یعنی معاله‌ی دیفرانسیل عملاً با معادله‌ی نیوتن (که درجه‌ی دو است) فرقی ندارد. به عبارت ِ دیگر بنا بر مکانیک ِ نیوتن، به غیر از مکان ِ اولیه ($x(t_0)$) و مشتق ِ اول ِ مکان در ابتدا ($v(t_0)$)، بقیه‌ی مشتق‌ها (مشتق ِ دوم یا شتاب ِ اولیه $a(t_0)$، مشتق ِ سوم و ...) مشخص هستند. این چیزی است که ما در آزمایش و حتی تجربیات روزمره‌ی خودمان می‌توانیم ببینیم: در یک مسئله یا شرایط ِ خاص، مکان ِ و سرعت ِ اولیه را می‌توان تغییر داد، ولی با تعیین ِ آن‌ها شتاب مشخص است [4]! این محتوای زیادی به پیش‌نهاد ِ نیوتن می‌دهد.

حالتی که ممکن است جالب باشد برای $n = 1$ اتفاق می‌افتد، یعنی: $\vec{F}_{(1)}(\vec{x}, t) = m\vec{v}$. در نگاه ِ اول ممکن است گفته شود که وضع ِ این یکی هم مانند ِ بقیه است — در واقع با یک بار انتگرال‌گیری از رابطه‌ی نیوتن می‌توان به این رابطه رسید: $\vec{F}_{(1)} = \int \vec{F}_{(2)}\ dt$. اما با کمی دقت خواهیم فهمید که وضع ِ این یکی در واقع خراب است [5][6]! اشکال ِ اول به

نوعی در بالا اشاره شد: می‌دانیم که می‌توان مکان و سرعتِ اولیه را در شرایطِ مشخصِ یک مسئله به دل‌خواه تغییر داد، و این یعنی سرعت و به تبعِ آن $m\vec{v}$ نمی‌توانند از یک معادله مثلِ معادله‌ی بالا تعیین شوند؛ مثلاً $\vec{F}_{(1)}(\vec{x}(t_0),t_0)=m\vec{v}(t_0)$. و اما اشکالِ دوم. به یاد بیاوریم که $\vec{F}(n)$ها قرار است تاثیرِ محیطِ اطراف را نمایندگی کنند. ما حداقل یک موردِ بسیار معروف می‌شناسیم که در آن تعبیرِ $\vec{F}_{(1)}$ به عنوانِ تاثیرِ محیط ثقیل است و آن مسئله‌های مربوط به برخورد است. در مکانیکِ کلاسیک جای یک ذره به عنوانِ تابعی از زمان نمی‌تواند پَرش داشته باشد، ولی سرعت، به خصوص در مواقعی که ذره ضربه‌ای سریع و ناگهانی می‌خورد، می تواند پرش داشته باشد. مثلاً حالتی را تصور کنید که یک ذره‌ی ساکن در زمان $t=0$ در اثر یک برخورد یا ضربه‌ی ناگهانی سرعتِ v_0 را پیدا کند و از آن پس بدونِ هیچ مزاحمتی با همین سرعت ادامه دهد — پس مطابقِ رابطه‌ی نوعِ (1)اُم برای تابعِ تاثیرِ محیطِ $\vec{F}_{(1)}$ به دست می آوریم:

$$\vec{F}_{(1)}(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ mv_0, & t\geq 0 \end{cases} . \qquad (4)$$

تعبیرِ تابع بالا واضح است: ذره درست تا قبل از برخورد هیچ تاثیری از ضربه احساس نمی‌کند، و پس از آن برای همیشه از محیط تاثیر می‌پذیرد! [7][8][9]، و این در صورتی است که در مسئله قید شده که ذره پس از برخورد دیگر مزاحمی ندارد. در این جاست که به یاد این مطلب می‌افتیم که در مکانیکِ نیوتن تابعِ $\vec{F}_{(1)}$ در واقع تکانه‌ی خطی ذره است ($\vec{P}=m\vec{v}$) — یعنی خاصیتی از ذره و نه چیزی که قرار است تاثیرِ محیط توسطِ آن معرفی می‌شود. در این‌جا هنر نیوتن معلوم می‌شود که دقیقاً رابطه‌ای را به ما پیش‌نهاد می‌کند که هم مشتق و انتگرال‌گیری اضافی ندارد و هم تعبیرِ اثرِ محیط برای نیرویی که معرفی می‌کند قابلِ قبول است.

ممکن است روابطِ دیگری نیز پیش‌نهاد شوند. مثلاً روابطی کاملاً کلی به شکلِ:

$$\vec{G}(\vec{x},\frac{d\vec{x}}{dt},\frac{d^2\vec{x}}{dt^2},\cdots,t)=\sum_n\sum_m c_{nm}\left(\frac{d^n\vec{x}}{dt^n}\right)^m, \qquad (5)$$

که در آن $\vec{G}$ یک نیرو است که مطالعه‌ی حرکت ذره‌ی آزمون، و فرض این‌که رابطه‌ی بینِ اثرِ محیط و حرکتِ ذره رابطه‌ی بالاست آن را تعیین می‌کند — درست مثلِ کاری که با معادله‌ی نیوتن کردیم (توجه داریم که رابطه‌ی بالا تا حدی سمبولیک است، به این معنا که طوری باید طراحی شود که طرفِ دومِ معادله بُردار بماند). ولی عیبِ روابطِ شبیه بالا

این است که در واقع آن‌ها در واقع اطلاعاتی بیش از رابطه‌ی نیوتن ندارند! حالا می‌بینید نیوتن چه کرده است!!

بد نیست در این‌جا اشاره‌ای به نقش ِ جرم کنیم. وقتی قانع شدیم که رابطه‌ی مفید درجه‌ی دو، به شکل ِ $\vec{f} = \vec{a}$ است، می‌توان یک قدم دیگر را نسبتاً به راحتی برداشت. در موارد ِ زیادی و به تجربه می‌توان دید که نسبت ِ $\vec{f}/m$ مقدار ِ ثابتی است، که در آن m در هر مورد «جرم ِ» ذره یا شی ِ است. این یعنی کمیت ِ $\vec{F}/m = \vec{f}$، ماهیتی مستقل از ذره دارد، که به آن نیرو می‌گوییم.

همان‌طور که دیدید مقداری از توجیهات در بالا بر پایه‌ی بعضی از شهود و انتظارات روزمره‌ی ما بود. در واقع تاریخ فیزیک نشان داد که این اساس اشکال دارد. با کشف نظریه‌ی نسبیت ِ خاص مقداری از این اساس فرو ریخت، و فهمیده شد که باید در تعریف ِ نیرو و جرم در رابطه‌ی نیوتن تصحیحاتی صورت بگیرد، که البته فقط در سرعت‌های قابل ِ مقایسه با سرعت ِ نور قابل ِ مشاهده و اندازه‌گیری هستند. اما ضربه‌ی نهایی به تصویر ِ نیوتن از دنیای میکروسکوپی وارد شد، جایی که مفاهیم ِ مکان، سرعت، حرکت، معادله‌ی حرکت و نیرو (به عنوان ِ اثر ِ محیط) به کلی دگرگون شدند. اما با تمام این نباید فراموش کنیم که با سنگ بنایی که نیوتن گذاشته بود تمام کشفیات ِ بعدی حاصل شد. به علاوه تصویر ِ نیوتنی در دنیای ِ بزرگ مقیاس هم‌چنان جواب‌هایی معتبر به ما می‌دهد: هنوز هم تمام ِ وسایل ِ اندازه‌گیری، حتی آن‌ها که مکانیک ِ کوانتمی را تایید می‌کنند، بر اساس ِ مکانیک ِ نیوتن کار می‌کنند!

قدردانی: نویسنده از راهنمایی خرمی ممنون است.

یادداشت‌ها

[1] ما از همه، به خصوص از نیوتن به خاطر ِ این‌که این متن با کمی تاخیر (حول و حوش ِ ۳۰۰ سال) آماده شده است معذرت می‌خواهیم.

[2] باور کنید این قدم ِ بسیار بزرگ است؛ مقدار ِ زیادی از عظمت ِ نیوتن به خاطر ِ این است که توانست این قدم را بردارد!

[3] برای ِ مثال، مواقعی که می‌دانیم نیروی ِ ثابت ِ نیوتن‌ی نداریم باید فرض کنیم که تمام ِ ثابت‌های انتگرال صفر هستند. برای مواقعی که می‌دانیم نیروی ِ نیوتن ِ ثابت داریم فرض

می‌کنیم که آخرین انتگرال ثابتی می‌دهد که همان نیروی ِ ثابت ِ نیوتن‌ی است. مثلاً در سقوط ِ آزاد ($-mg = md^2x/dt^2$)، ثابت ِ انتگرال ِ را به صورت ِ زیر قرار می‌دهیم:

$$\cdots \to \frac{d^3x}{dt^3} = 0 \to \frac{d^2x}{dt^2} = -g.$$

[4] در بسیاری از مثال‌ها، مانند سقوط ِ آزاد یا با جرم و فنر و ... می‌توان این واقعیت را آزمود.

[5] درمقایسه با قبلی‌ها که حداقل نتایج‌ی معادل ِ نظریه‌ی نیوتن می‌دهند.

[6] وضع ِ نوع ِ (0)اُم ($\vec{F}_{(0)}(\vec{x},t) = m\vec{x}(t)$) که افتضاح است — یعنی هر ذره را وقتی می‌توانیم بگوییم کجاست که جایش را بدانیم!!

[7] شاید شما هم با افرادی که تازه دارند مکانیک یاد می‌گیرند برخورد داشته باشید که احساس‌شان از نیرو همین است که ما در این مثال دیدیم.

[8] به این «برداشت ِ ارسطویی» می‌گویند؛ البته بر ما معلوم نیست که آیا ارسطو خودش صراحتاً این برداشت را ارائه داده است، و یا مردم بعداً این حرف‌ها را به او نسبت دادند.

[9] بعد از کامل شدن ِ این متن متوجه شدیم که دیگران، از جمله فاینمن در چند دهه قبل!، به این مثال‌ها توجه داشته‌اند؛ نگاه کنید به:

Feynman Lectures on Physics, vol. 1, chap. 12.