

پراکنده‌گی از پتانسیل - با بُرد - محدود در مکانیک - کلاسیک

امیرحسین - فتح‌اللهی

fatho@mail.cern.ch

چکیده: در این مقاله عنوان می‌شود که چطور پتانسیل‌های - با بُرد - محدود به دامنه‌های - پراکنده‌گی - محدود منجر می‌شوند.

دامنه‌ی پراکنده‌گی جزئی در مکانیک - کلاسیک با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin \Theta} \left| \frac{ds(\Theta)}{d\Theta} \right| \quad (1)$$

که در آن s پارامتر برخورد است [1]. زاویه‌ی پراکنده‌گی برحسب - پارامتر - برخورد برای - پتانسیل - شعاعی - $V(r)$ با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\Theta(s) = \pi - 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{s \, dr}{r \sqrt{r^2 \left[1 - \frac{V(r)}{E} \right] - s^2}} \quad (2)$$

که r_m کم‌ترین فاصله‌ی ذره‌ای با انرژی - E و پارامتر - برخورد - s از مرکز - نیرواست. در این جا ما فقط پتانسیل‌هایی را در نظر می‌گیریم که در همه‌ی فاصله‌ها دافعه باشند. با پیدا کردن - تابع - وارون می‌توان $s(\Theta)$ را پیدا کرد. با داشتن - دامنه‌ی پراکنده‌گی - جزئی می‌توان دامنه‌ی پراکنده‌گی - کل را حساب کرد:

$$\sigma_T = \int_{4\pi} \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta \quad (3)$$

که با جای‌گذاری از رابطه‌ی بالا انتظار داریم:

$$\sigma_T = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta = 2\pi \int_0^\infty s ds = \infty \quad (4)$$

پس به نظر می‌رسد که دامنه‌ی پراکنده‌گی - کل هم‌واره بی‌نهایت باشد! نکته این جاست که این نتیجه فقط برای پتانسیل‌های بلندبُرد، در واقع بی‌نهایت بُرد، درست است. برای پتانسیل‌هایی که بعد از یک فاصله صفر می‌شوند، در واقع یک پارامتر - برخورد - بیشینه وجود دارد که ذرات - برخوردکننده با پارامتری بزرگ‌تر از آن پتانسیل را نمی‌بینند؛ این ذرات در واقع پراکنده نمی‌شوند و در نتیجه نباید در محاسبه‌ی بالا وارد شوند. اگر پارامتر - برخورد - بیشینه را با s_{\max} نشان دهیم داریم:

$$\sigma_T = 2\pi \int_0^{s_{\max}} s ds = 2\pi s_{\max}^2 \quad (5)$$

در نتیجه پتانسیل سطح - موثری به اندازه‌ی مساحت - دایره‌ای به شعاع - s_{\max} از خود نشان می‌دهد.

یک مثال - پتانسیل - زیر را برای یک کره‌ی سخت در نظر بگیرید:

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (6)$$

در این مسئله برای هر پارامتر - برخورد $r_m = R$. پس داریم:

$$\begin{aligned} \Theta(s) &= \pi - 2 \int_R^\infty \frac{s dr}{r \sqrt{r^2 - s^2}} \\ &= \pi - 2 \arcsin \frac{s}{R} \end{aligned} \quad (7)$$

که به ما می‌دهد: $s(\Theta) = R \cos \frac{\Theta}{2}$. این نتیجه را می‌شود با در نظر گرفتن - برخورد - کشسان - ذره با کره‌ی سخت هم به دست آورد. رابطه‌ی اخیر بیش‌ترین مقدار - قابل -

قبول پارامتر برخورد را می‌دهد: $s_{\max} = R$ ، که در واقع همان شعاع کره‌ی سخت است. خواهیم داشت:

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin \Theta} \left| \frac{ds(\Theta)}{d\Theta} \right| = \frac{R \cos \frac{\Theta}{2}}{\sin \Theta} \frac{1}{2} R \sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{4} R^2 \quad (8)$$

واز آنجا

$$\sigma_T = \int_{4\pi} \sigma(\Omega) d\Omega = 4\pi \frac{1}{4} R^2 = \pi R^2 = \pi s_{\max}^2 \quad (9)$$

که نشان می‌دهد کره‌ای به شعاع R سطح موثری به اندازه‌ی مساحت دایره‌ی عظیمه‌اش نشان می‌دهد.

مثال دیگر - پتانسیل یک کره‌ی نفوذپذیر را ممکن است به شکل زیر داد:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 > 0, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (10)$$

انرژی، سرعت خطی در فواصل دور ذرات، تکانه‌ی زاویه‌ای و پارامتر برخورد ذرات به شکل زیر به هم مربوط هستند:

$$l = mv_0 s \quad (11)$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (12)$$

در حالتی که $E < V_0$ ، ذرات کره را مانند کره‌ی نفوذناپذیر می‌بینند، و شرایط مانند مثال قبل می‌شود. برای $E > V_0$ شرط کمترین فاصله‌ی ذره تا مرکز کره $\dot{r} = 0$ است که به ما می‌دهد:

$$E = \frac{l^2}{2mr_m^2} + V(r_m) = \frac{m^2 v_0^2 s^2}{2mr_m^2} + V(r_m) \quad (13)$$

$$= E \frac{s^2}{r_m^2} + V(r_m) \Rightarrow 1 - \frac{s^2}{r_m^2} = \frac{V(r_m)}{E} \quad (14)$$

با رابطه‌ی بالا به راحتی می‌توان دید که : $r_m \leq R$ و در نتیجه:

$$1 - \frac{s^2}{r_m^2} = \frac{V_0}{E} \Rightarrow r_m = s \sqrt{\frac{E}{E - V_0}} \Rightarrow s \leq r_m \leq R \quad (15)$$

برای بیش‌ترین r_m خواهیم داشت:

$$r_m = R \Rightarrow R = s_{\text{ref}} \sqrt{\frac{E}{E - V_0}} \Rightarrow s_{\text{ref}} = R \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} < R \quad (16)$$

برای ذراتی که با پارامتری بزرگ‌تر از s_{ref} تابیده می‌شوند، کره نفوذناپذیر است و در واقع برای آن‌ها $r_m = R$. در مشابهت با مسئله‌ی شکست نور، می‌توان ضریب شکست کره را به صورت $n = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}}$ تعریف کرد که کم‌تر از 1 است. در این صورت نفوذ ذرات به داخل کره مانند وارد شدن نور از یک محیط با ضریب شکست بیش‌تر (یعنی 1) به یک محیط با ضریب کم‌تر (از 1) است. در این صورت برای محیطی به شکل کره، s_{ref} را می‌شود از شرط بازتابش کلی نیز به دست آورد.
برای $0 \leq s \leq nR = s_{\text{ref}}$ داریم:

$$\begin{aligned} \Theta(s) &= \pi - 2 \int_{s/n}^{\infty} \frac{s dr}{r \sqrt{r^2 \left(1 - \frac{V(r)}{E}\right) - s^2}} \\ &= 2 \arcsin \frac{s}{nR} - 2 \arcsin \frac{s}{R} \end{aligned} \quad (17)$$

به راحتی دیده می‌شود که

$$\frac{d\Theta}{ds} > 0, \quad \left. \frac{d\Theta}{ds} \right|_{s=nR} = \infty \quad (18)$$

هم چنین برای $nR \leq s \leq R$ داریم

$$\begin{aligned} \Theta(s) &= \pi - 2 \int_R^{\infty} \frac{s dr}{r \sqrt{r^2 - s^2}} \\ &= \pi - 2 \arcsin \frac{s}{R} \end{aligned} \quad (19)$$

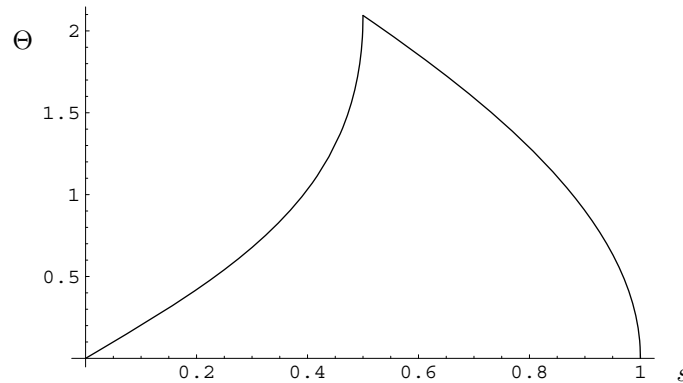
که برای آن داریم

$$\frac{d\Theta}{ds} < 0, \quad \left. \frac{d\Theta}{ds} \right|_{s=R} = -\infty \quad (20)$$

زاویه‌ی پراکنده‌گی که در آن بازتابش کلی شروع می‌شود، که البته بیش‌ترین زاویه‌ی پراکنده‌گی است، به دست می‌آید:

$$s = s_{\text{ref}} \Rightarrow \cos \frac{\Theta_{\text{max}}}{2} = n \quad (21)$$

در شکل Θ بر حسب s به ازای $n = 0.5$ و $R = 1$ رسم شده است. در این مورد داریم $\Theta_{\text{max}} = 2\pi/3$.



رسم Θ بر حسب s برای $n = 0.5$ و $R = 1$

در این صورت خواهیم داشت:

$$0 \leq s \leq nR : \quad \cos \frac{\Theta}{2} = \sqrt{1 - \frac{s^2}{R^2}} \sqrt{1 - \frac{s^2}{n^2 R^2}} + \frac{s^2}{nR^2} \Rightarrow \quad (22)$$

$$s^2 = \frac{R^2 n^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}}{n^2 + 1 - 2n \cos \frac{\Theta}{2}} \quad (23)$$

دامنه‌ی جزئی-پراکنده‌گی ناشی از پارامترهای s_{ref} $0 \leq s \leq nR = s_{\text{ref}}$ به دست می‌آید:

$$\sigma_1(\Theta) = \frac{n^2 R^2}{4 \cos \frac{\Theta}{2}} \frac{(1 - n \cos \frac{\Theta}{2})(\cos \frac{\Theta}{2} - n)}{(n^2 + 1 - 2n \cos \frac{\Theta}{2})^2}, \quad 0 \leq \Theta \leq \Theta_{\max} \quad (24)$$

هم‌چنین خواهیم داشت:

$$nR \leq s \leq R: \quad \Theta(s) = \pi - 2 \arcsin \frac{s}{R} \Rightarrow s = R \cos \frac{\Theta}{2} \quad (25)$$

که همان رابطه برای کره‌ی نفوذناپذیر است، و در نتیجه می‌دهد:

$$\sigma_2(\Theta) = \frac{1}{4} R^2, \quad 0 \leq \Theta \leq \Theta_{\max} \quad (26)$$

دامنه‌ی جزئی-پراکنده‌گی را می‌توان به دست آورد:

$$\begin{aligned} \sigma(\Theta) &= \sigma_1(\Theta) + \sigma_2(\Theta) \\ &= \begin{cases} \frac{n^2 R^2}{4 \cos \frac{\Theta}{2}} \frac{(1 - n \cos \frac{\Theta}{2})(\cos \frac{\Theta}{2} - n)}{(n^2 + 1 - 2n \cos \frac{\Theta}{2})^2} + \frac{1}{4} R^2, & 0 \leq \Theta \leq \Theta_{\max} \\ 0, & \Theta_{\max} \leq \Theta \leq \pi \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

می‌توان دید که

$$\sigma_T = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) \sin \Theta \, d\Theta = \pi R^2 = \pi s_{\max}^2 \quad (28)$$

به عنوان آخرین نکته یادآوری می‌شود که هر پتانسیل - بی نهایت بُرد در مکانیک - کلاسیک سطح - مقطع - کل - بی نهایت می‌دهد. در این جا منظور از بی نهایت بُرد پتانسیلی است که فاصله‌ی وجود نداشته باشد که پس از آن پتانسیل دقیقاً صفر شود.

0 یادداشت‌ها و مراجع‌ها

- [1] H. Goldstein; "Classical mechanics", 2nd edition (Addison-Wesley, 1980),
chap. 3