FAT-117

تثبیتِ پیمانه و ظهورِ اشباح در نظریه‌های پیمانه‌ای

امیرحسینِ فتح‌اللهی

چکیده: در این یادداشت چه‌گونه‌گیِ تثبیت پیمانه و ظهورِ اشباح در انتگرال‌مسیرِ تابعیِ میدان‌های پیمانه‌ای در مشابهت با انتگرالِ معمولی توضیح داده می‌شود.

در فرمول‌بندی انتگرال‌مسیرِ نظریه‌های پیمانه‌ای چه‌گونه‌گیِ تثبیتِ پیمانه و واردشدنِ اشباحِ فَدی‌یِف-پوپوف[1] به عنوان روشِ کلاسیک کاملاً جاافتاده است. فهمِ این روش در اولین برخورد گاهی سخت است. در کتاب بسیارخوبِ «نظریه میدان» رایدر[2] یک مثال در انتگرال‌گیریِ معمولی برای فهمِ به‌تر این روش آورده شده است [۱]. در مثالِ رایدر بخشی که قرار است با این روش از انتگرال جدا شود محدود (دقیق‌تر فشرده) است - در واقع اندازه‌ی زاویه‌ی فضائی در سطح، یعنی 2π است. مثالِ دیگر توسطِ کولمن[3] (بازگوئی در کتاب بیلین-لاو[4]) است که بخشِ جدا شده بی‌نهایت است، اگرچه نقشِ تقارن و معادل‌سازی در آن برجسته نشده است [۲]. در این جا سعی می‌شود یک مثال در مشابهتِ قدم‌به‌قدم با آن‌چه در نظریه‌ی میدان انجام می‌شود ارائه شود.

اگرچه روشِ موردِ بحث برایِ نظریه‌های غیرآبلی مزایایِ خود را نشان می‌دهد، و به نوعی برای نظریه‌ی $U(1)$ با پیمانه‌هایِ معمول تغییری ایجاد نمی‌کند، اما برایِ ساده‌کردنِ بحث ما در این‌جا سراغ نظریه‌هایِ غیرآبلی نمی‌رویم. در ابتدا به مشاهده‌ی بسیار مهم در نظریه‌ی پیمانه‌ای $U(1)$ (الکترومغناطیس ماکسول) اشاره کنیم که با کنش به شکلِ زیر است

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \ \frac{-1}{4}(\partial^\mu A^\mu - \partial^\nu A^\nu)^2 \\ &= \int d^4x \ \frac{-1}{4} A^\mu(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu \end{aligned} \tag{1}$$

در بالا

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1), \qquad \Box = \partial_0^2 - \partial_i^2 \tag{2}$$

فرق دو عبارتِ بالا در یک جمله‌ی مرزی است. در انتگرالِ مسیر رویِ میدانِ پیمانه‌ای دترمینانِ عمل‌گرِ به وجود آمده در عبارتِ دوم پیدا می‌شود:

$$Z = \int DA_\mu \ e^{iS} \ \ \propto \ \ (\det(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu))^{-1/2} \tag{3}$$

---

[1] Faddeev-Popov
[2] Ryder
[3] Coleman
[4] Bailin-Love

اما دترمینان این عمل‌گر صفر است. یک راهِ فهمیدن این موضوع این است که توجه کنیم عمل‌گرِ بالا ویژه‌مقدارِ صفر دارد:

$$(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\partial^\mu f(x) = \Box\,\partial^\nu f - \partial^\nu\,\Box f = 0 \tag{4}$$

راهِ دیگر محاسبه‌ی مستقیم است:

$$\det\begin{pmatrix} -\partial_1^2-\partial_2^2-\partial_3^2 & -\partial_0\partial_1 & -\partial_0\partial_2 & -\partial_0\partial_3 \\ -\partial_1\partial_0 & \partial_0^2-\partial_2^2-\partial_3^2 & -\partial_1\partial_2 & -\partial_1\partial_3 \\ -\partial_2\partial_0 & -\partial_2\partial_1 & \partial_0^2-\partial_1^2-\partial_3^2 & -\partial_2\partial_3 \\ -\partial_3\partial_0 & -\partial_3\partial_1 & -\partial_3\partial_2 & \partial_0^2-\partial_1^2-\partial_2^2 \end{pmatrix} = 0 \tag{5}$$

اگر میدان‌ها را بر حسبِ ویژه‌بردارهای عمل‌گر فوق بسط دهیم و در کنش قرار دهیم، آن بخش که متناسبِ ویژه‌بردارِ متناظرِ ویژه‌مقدارِ صفر است در کنش ظاهر نمی‌شود، به این دلیل که عمل‌گرِ بالا روی آن صفر است. از طرفی روی همه‌ی مولفه‌هایِ میدان، از جمله آن قسمت که در کنش ظاهر نمی‌شود، در انتگرال‌مسیر جمع زده می‌شود، که یک سهمِ بی‌نهایت می‌دهد. این دلیلِ بی‌نهایت‌شدنِ عبارتِ (3) است.

در عمل باید کاری کرد تا بخش‌هائی که در واقع به عنوانِ متغیرهایِ زائد در کنش هست‌اند در انتگرال‌مسیر جمع زده نشوند. با رفتن به فضایِ فوریه که عمل‌گرِ فوق به شکلِ

$$\eta_{\mu\nu}\; p\cdot p - p_\mu p_\nu \tag{6}$$

در می‌آید معلوم می‌شود که بخش‌هایِ زائد در واقع بخش‌هایِ به اصطلاح طولیِ میدان هستند:

$$(\eta_{\mu\nu}\; p\cdot p - p_\mu p_\nu)A^\mu_\parallel = 0 \tag{7}$$

که در آن

$$A^\mu_\parallel \propto p^\mu \tag{8}$$

در رهیافتِ سنتی به کوانتش نظریه‌ی الکترومغناطیس ماکسول یک جمله‌ی تثبیتِ پیمانه اضافه می‌شود. برای آشنائی با فرمول‌بندی همیلتونیِ نظریه الکترومغناطیس به [۵] رجوع کنید.

با این مقدمه به سراغ مثالِ اشاره‌شده به هم‌راهِ تطابقِ پله‌به‌پله‌ی آن با نظریه‌ی میدان می‌رویم. در این‌جا همان‌طور که گفته شد به سراغ کوانتشِ از طریقِ انتگرال‌مسیر می‌رویم.

مثال	نظریه‌ی میدان
انتگرال زیر را درنظر بگیرید: $I = \int d^2r \ \exp\left(-\vec{r}^T M \vec{r}\right) \propto (\det M)^{-1/2}$ که در آن T به معنای ترانهاده و $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ توجه داریم $\det M = 0$ که می‌دهد $I \to \infty$ درواقع با تبدیلِ $x+y=u$ و $x-y=v$ می‌توان دید که $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-u^2}$ که می‌دهد $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \int_{-\infty}^{\infty} dv$ که بی‌نهایت است. در واقع در مختصاتِ جدید دیده می‌شود که متغیرِ v در انتگرال‌ده غایب است.	انتگرال‌مسیرِ کنشِ اقلیدسیِ زیر را در نظر بگیرید: $\mathcal{I} = \int DA \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x\, A^\mu D^{\mu\nu} A^\nu\right) \propto (\det D)^{-1/2}$ که در آن $D_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu, \quad \Box = \partial_\alpha\partial_\alpha$ با محاسبه مستقیم داریم $\det D = 0$ که می‌دهد $\mathcal{I} \to \infty$ همان‌طور که در مقدمه گفته شد می‌دانیم در واقع مقداریِ از درجاتِ آزادی، که به آن مولفه‌هایِ طولیِ میدان می‌گوئیم ($A_\mu \propto \partial_\mu$) در انتگرال‌ده غائب هست‌اند.
دیده می‌شود که با تبدیلِ $\vec{r} \to \vec{r}_\Lambda = \Lambda\vec{r}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1+\lambda & \lambda \\ -\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$ انتگرال‌ده و اندازه‌ی انتگرال عوض نمی‌شود: $\vec{r}_\Lambda^T M \vec{r}_\Lambda = \vec{r}^T M\vec{r}, \quad d^2r_\Lambda = d^2r$ در واقع با تبدیلِ بالا معلوم می‌شود که می‌توان متغیرهایِ انتگرال را عوض کرد بدونِ اینکه چیزی در انتگرال عوض شود. این بی‌نهایت تغییرِ بدونِ تاثیر باعث بی‌نهایت‌شدنِ انتگرال می‌شوند. هم‌چنین با محاسبه‌ی صریح دیده می‌شود: $\begin{pmatrix} x_\Lambda \\ y_\Lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\y\end{pmatrix} + \lambda(x+y)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ که آخری ویژه‌بردارِ متناظرِ ویژه‌مقدارِ صفرِ M است: $M\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ در واقع تبدیلِ بالا چیزی متناسب با این ویژه‌بردارِ اضافه می‌کند.	دیده می‌شود که با تبدیلِ $A^\mu \to A^\mu_\Lambda = A^\mu + \partial^\mu\Lambda$ انتگرال‌ده و اندازه‌ی انتگرال عوض نمی‌شوند: $A^\mu_\Lambda D^{\mu\nu} A^\nu_\Lambda = A^\mu D^{\mu\nu}A^\nu, \quad DA_\Lambda = DA$ (دومی به این خاطر است که تغییرِ داده شده در فضایِ تابعی‌ها ثابت است). در واقع این بی‌نهایت تغییرِ بدونِ تاثیر باعثِ بی‌نهایت‌شدنِ انتگرال می‌شود. هم‌چنین داریم: $D^{\mu\nu}\,\partial^\mu\Lambda = \Box\,\partial^\nu\Lambda - \partial^\nu\,\Box\Lambda = 0$ که یعنی $\partial^\mu\Lambda$ ویژه‌بردارِ صفرِ D است. پس تبدیلِ داده‌شده در واقع متناسب با بردارویژه‌ی متناظر با مقدارویژه‌ی صفرِ عمل‌گرِ D اضافه می‌کند. تبدیلِ معرفی‌شده در بالا را به عنوانِ تبدیلِ پیمانه‌ای می‌شناسیم.

مثال	نظریه‌ی میدان
برای این‌که جواب محدود پیدا شود باید جلوی انتگرال‌گیری‌های اضافه را گرفت. این کار را با معرفیِ یک شرط روی مختصات می‌توان انجام داد. مثلاً فرض می‌شود تنها رویِ خم با شرط زیر انتگرال‌گیری انجام شود: $F(\vec{r})=0$ که معمولاً به وسیله‌ی تابعِ دلتایِ دیراک می‌توان آن را در عبارت‌ها معرفی کرد. مثلاً ممکن است شرط به این شکل در نظرگرفته شود $F(\vec{r})=a\,x+b\,y=0$	در فضایِ میدان‌ها شرطی گذاشته می‌شود تا از انتگرال‌گیری اضافه رویِ متغیرهایِ زائد جلوگیری شود. این شرط که معمولاً به آن تثبیتِ پیمانه می‌گویند ممکن است به شکلِ زیر معرفی شود: $F(A)=0$ از تثبیت‌پیمانه‌هایِ معروف می‌توان به شرطِ لورنتس: $F(A)=\partial_\mu A_\mu=0$ اشاره کرد.
با کمکِ شرط عبارتِ زیر را تعریف می‌کنیم: $\Delta(\vec{r})=\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\;\delta[F(\vec{r}_\Lambda)]$ می‌توان دید که عبارت بالا تحتِ تبدیلاتِ پیش‌گفته ناورداست. فرض کنید با تبدیلِ Λ' داشته باشیم: $\Delta(\vec{r}_{\Lambda'})=\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\;\delta\left(F(\vec{r}_{\Lambda'\Lambda})\right)$ با محاسبه‌ی مستقیم می‌توان دید: $\Lambda'\Lambda=\begin{pmatrix}1+\lambda+\lambda' & \lambda+\lambda'\\ -(\lambda+\lambda') & 1-(\lambda+\lambda')\end{pmatrix}$ که نشان می‌دهد $\Lambda''=\Lambda'\Lambda$ معادلِ تبدیلِ با پارامترِ تبدیلِ $\lambda''=\lambda+\lambda'$ است. هم‌چنین $d\lambda''=d\lambda$ که می‌دهد $\Delta(\vec{r}_{\Lambda'})=\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda''\;\delta\left(F(\vec{r}_{\Lambda''})\right)=\Delta(\vec{r})$ که یعنی کمیتِ معرفی‌شده با تبدیل عوض نمی‌شود. مثلاً برایِ شرطِ $F(\vec{r})=ax+by=0$ داریم: $\Delta(\vec{r})=\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\;\delta[ax+by+\lambda(x+y)(a-b)]$ که می‌دهد (با شرطِ $a\neq b$): $\Delta(\vec{r})=\lvert(x+y)(a-b)\rvert^{-1}_{ax+by=0}$ عبارتِ بالا همان‌طور که باید با تبدیلات عوض نمی‌شود چون $x_\Lambda+y_\Lambda=x+y$.	عبارتِ زیر را تعریف می‌کنیم $\Delta(A)=\int D\Lambda\;\delta[F(A_\Lambda)]$ می‌توان دید که عبارتِ بالا پیمانه ناورداست. فرض کنید برایِ تبدیل‌یافته‌ی Λ' داریم: $\Delta(A_{\Lambda'})=\int D\Lambda\;\delta[F((A'_\Lambda)_\Lambda)]$ اما داریم: $(A_{\Lambda'})_\Lambda=A+\partial\Lambda'+\partial\Lambda$ که یعنی تبدیل با $\Lambda''=\Lambda+\Lambda'$. چون $D\Lambda=D\Lambda''$ پس داریم: $\Delta(A_{\Lambda'})=\int D\Lambda''\;\delta[F(A_{\Lambda''})]=\Delta(A)$ که یعنی پیمانه ناورداست. مثلاً برایِ پیمانه‌ی لورنتس داریم: $\Delta(A)=\int D\Lambda\;\delta[\partial A+\Box\Lambda]$ که می‌دهد $\Delta(A)=[\det\Box]^{-1}$ همان‌طور که باید عبارتِ بالا پیمانه ناورداست.

مثال	نظریه‌ی میدان
در انتگرالِ اولیه یک 1 وارد می‌کنیم که می‌شود: $I=\int d^2r\ \underbrace{[\Delta(\vec{r})]^{-1}\times\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\ \delta[F(\vec{r}_\Lambda)]}_{=1}\ \exp\left(-\vec{r}^T M\vec{r}\right)$ از آن‌جا که داشتیم: $\vec{r}_\Lambda^T M\vec{r}_\Lambda=\vec{r}^T M\vec{r},\quad d^2r_\Lambda=d^2r,\quad \Delta(\vec{r}_\Lambda)=\Delta(\vec{r})$ با جابه‌جائی ترتیبِ انتگرال‌ها می‌توانیم بنویسیم: $I=\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int d^2r_\Lambda\,[\Delta(\vec{r}_\Lambda)]^{-1}\delta[F(\vec{r}_\Lambda)]\exp\left(-\vec{r}_\Lambda^T M\vec{r}_\Lambda\right)$ در انتگرالِ دوم تمام متغیرها را می‌توان به $\vec{r}$ برگرداند که می‌شود $I=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda}_{=\infty}\times\underbrace{\int d^2r\,[\Delta(\vec{r})]^{-1}\delta[F(\vec{r})]\exp\left(-\vec{r}^T M\vec{r}\right)}_{I_f}$ عبارتِ بالا از این جهت مناسب است که بی‌نهایتِ مربوط به تبدیلات را بیرون کشیده است، که باعث می‌شود عبارتِ باقی‌مانده، بدونِ جمع‌زدن روی متغیرهای معادل، محدود شود. مثلاً برایِ حالتِ $F=ax+by=0$ با فرضِ $a=0$ و $b=1$، یعنی $F=y=0$ بر اساسِ آن‌چه به دست آوردیم داریم: $\Delta(\vec{r})=\lvert x+y\rvert^{-1}_{y=0}=\lvert x\rvert^{-1}$ که در نتیجه می‌دهد: $I_f=\int d^2r\,\lvert x\rvert\,\delta(y)\,\exp\left(-\vec{r}^T M\vec{r}\right)=1$	در انتگرالِ اولیه یک 1 وارد می‌کنیم که می‌شود: $\mathcal{I}=\int DA\ \overbrace{[\Delta(A)]^{-1}\times\int D\Lambda\ \delta[F(A_\Lambda)]}^{=1}$ $\times\exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x\,A^\mu D^{\mu\nu}A^\nu\right)$ از آن‌جا که داشتیم: $A^\mu_\Lambda D^{\mu\nu}A^\nu_\Lambda=A^\mu D^{\mu\nu}A^\nu,\ DA_\Lambda=DA,\ \Delta(A_\Lambda)=\Delta(A)$ با جابه‌جائیِ انتگرال‌ها داریم: $\mathcal{I}=\int D\Lambda\int DA_\Lambda\ [\Delta(A_\Lambda)]^{-1}\,\delta[F(A_\Lambda)]$ $\times\ \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x\,A^\mu_\Lambda D^{\mu\nu}A^\nu_\Lambda\right)$ در انتگرالِ دوم تمام متغیرها را به A برگردانیم $\mathcal{I}=\underbrace{\int D\Lambda}_{=\infty}\times\int DA\ [\Delta(A)]^{-1}\,\delta[F(A)]$ $\underbrace{\times\exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x\,A^\mu D^{\mu\nu}A^\nu\right)}_{\mathcal{I}_f}$ در عبارتِ بالا بی‌نهایتِ مربوط به تبدیلات بیرون آمده و انتگرالِ دوم خالی از جمع رویِ متغیرهایِ اضافی است. مثلاً با شرطِ تثبیتِ پیمانه‌ی لورنتس می‌شود: $\mathcal{I}_f=\int DA\,\det\Box\ \delta[\partial\cdot A]\ \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x A^\mu D^{\mu\nu}A^\nu\right)$ با انتگرالِ جزء‌به‌جزء در کنش در رابطه‌ی (1) دیدیم: $A^\mu D^{\mu\nu}A^\nu=\left(A_\mu\Box A_\mu-A_\mu\partial_\mu(\partial\cdot A)\right)$ که جمله‌ی دوم با تابعِ دلتا حذف می‌شود. جوابِ محدود با انتگرال‌گیری رویِ A می‌شود: $\mathcal{I}_f\propto\det\Box\times(\det\Box)^{-1}=1$

تا این‌جا بیرون‌آوردنِ بی‌نهایت‌هایِ ناشی از جمع‌زدن رویِ متغیرهایِ زائد انجام شده است. چیزی که بیرون آورده شده در واقعِ حجمِ بی‌نهایتی است که پارامترِ تبدیل اشغال می‌کرده.

اگرچه هدفِ اولیه به دست آمده است، عبارتِ موردِ استفاده در نظریه میدان به شکلِ دیگری است. در واقع هنوز دو قدم دیگر مانده است که در در ادامه به توضیحِ آن‌ها می‌پردازیم:

۱) محاسبه‌ی صریحِ $\Delta(A)$ به شکلِ یک دترمینان

۲) اِعمالِ قید به شکلِ یک جمله‌ی تثبیتِ پیمانه در کنش.

مثال	نظریه‌ی میدان
برایِ محاسبه‌ی $\Delta(\vec{r})$ داریم: $d\lambda = \left\|\det \frac{\partial\lambda}{\partial F}\right\| \; dF$ که اولی ژاکوبیِ تبدیلِ مختصات است. البته برایِ تبدیلِ یک‌بُعدی دترمینان لازم نیست ولی برایِ حفظِ شکلِ عمومی نگه داشته شده. پس: $\Delta(\vec{r}) = \int d\lambda\; \delta[F(\vec{r}_\Lambda)]$ $= \int dF \left\|\det \frac{\partial\lambda}{\partial F}\right\| \delta[F]$ $= \left\|\det \frac{\partial\lambda}{\partial F}\right\|_{F=0}$ مثلاً برایِ مثالِ $F(\vec{r}) = ax + by$ که داریم: $F(\vec{r}_\Lambda) = ax + by + \lambda(x+y)(a-b)$ همان نتیجه‌ی قبلی را داریم: $\Delta(\vec{r}) = \left\|\frac{\partial\lambda}{\partial F}\right\| = \|(x+y)(a-b)\|^{-1}_{ax+by=0}$ البته در انتگرال وارونِ نتیجه‌ی بالا را لازم داریم که می‌شود: $[\Delta(\vec{r})]^{-1} = \left\|\det \frac{\partial F}{\partial\lambda}\right\|_{F=0}$ این دترمینان را می‌توان بر حسبِ انتگرال رویِ متغیرهایِ گراسمان نوشت: $\det \frac{\partial F}{\partial\lambda} = \int d\eta^* d\eta\; \exp\left(i\,\eta^* \frac{\partial F}{\partial\lambda}\eta\right)$	برایِ محاسبه‌ی $\Delta(A)$ داریم: $D\Lambda = \left\|\det \frac{\delta\Lambda(x)}{\partial F(x')}\right\| \; DF$ که اولی ژاکوبیِ تبدیلِ مختصات است. پس: $\Delta(A) = \int D\Lambda\; \delta[F(A_\Lambda)]$ $= \int DF \left\|\det \frac{\delta\Lambda(x)}{\partial F(x')}\right\| \delta[F]$ $= \left\|\det \frac{\delta\Lambda(x)}{\partial F(x')}\right\|_{F=0}$ مثلاً برایِ شرطِ لورنتس $F(A) = \partial_\mu A_\mu = 0$ می‌شود: $F(A_\Lambda) = \partial_\mu A_\mu + \Box\Lambda = 0$ که نتیجه‌ی قبلی را می‌دهد: $\Delta(A) = \left\|\det \frac{\delta\Lambda(x)}{\partial F(x')}\right\|_{F=0} = \|\det\Box\|^{-1}$ البته در انتگرال‌ها وارون را لازم داریم که می‌شود: $[\Delta(A)]^{-1} = \left\|\det \frac{\delta F(x)}{\delta\Lambda(x')}\right\|_{F=0}$ دترمینانِ بالا را بر حسبِ انتگرال روی میدان‌های گراسمانی که به شبح معروف هست‌اند می‌نویسند: $\det\frac{\partial F(x)}{\delta\Lambda(x')} = \int D\eta^\dagger D\eta \exp\left(i\int d^4x d^4x' \eta^\dagger(x)\frac{\partial F(x)}{\delta\Lambda(x')}\eta(x')\right)$

در بالا این‌که دترمینان صفر نشود لازم است که در [۵] به عنوانِ شرطِ تثبیتِ پیمانه‌ی مناسب معرفی شد.

از آن‌جا که آخرین قدم کاربردِ خاص در نظریه‌ی میدان دارد فقط آن را در آن چارچوب ارائه می‌کنیم. در این قدم می‌خواهیم تابعِ دلتا که با آن شرطِ تثبیتِ پیمانه را در انتگرال‌مسیر وراد کرده‌ایم به صورتِ جمله‌ای در کنش وارد کنیم. فرض کنیم که شرط را بتوان به شکلِ زیر نوشت:

$$F(A(x)) = \mathcal{G}(A(x)) - g(x) = 0$$

بدیهی است:

$$\det \frac{\delta F(x)}{\delta\Lambda(x')}_{F=0} = \det \frac{\delta\mathcal{G}(x)}{\delta\Lambda(x')}_{\mathcal{G}=g}$$

فرض کنید محاسباتِ مشابه با $g(x)$ هایِ مختلف، که هر کدام از نظرِ متغیرهایِ زائد مهار شده‌اند، با وزنِ خاصی با

هم جمع شوند. به طورِ خاص بگیریم:

$$\int DA\,\delta[\mathcal{G}-g]\;\det\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\Lambda}\,e^{-S[A]}\;\rightarrow\;\int Dg\;\exp\!\left(-\frac{1}{2\alpha}\!\int\! d^4x\,g^2(x)\right)\int DA\,\delta[\mathcal{G}-g]\;\det\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\Lambda}\,e^{-S[A]}$$

حال با استفاده از تابعِ دلتا، و نوشتنِ دترمینان بر حسبِ انتگرالِ گراسمانی، داریم:

$$\int DA\,D\eta^\dagger D\eta\;\exp\left(-\!\int\! d^4x\;\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2+\frac{1}{2\alpha}\mathcal{G}^2(A)+i\eta^\dagger\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\Lambda}\eta\right]\right)$$

عبارت به دست آمده در بالا، و تعمیمِ آن به نظریه‌هایِ غیرآبلی، فقط یک چیز از آن‌چه که در نظریه‌ی میدان استفاده می‌شود کم دارد و آن هم جمله‌ی چشمه‌ی میدان است. هم در نظریه‌هایِ آبلی و هم در نشریه‌های غیرآبلی می‌توان نشان داد که اگر چشمه پایسته باشد، یعنی

$$\partial_\mu J_\mu = 0$$

کنش ناوردایِ پیمانه‌ای می‌ماند [۳]، که در نتیجه نتایجِ بالا را می‌شود استفاده کرد. البته همان‌طور که در [۴] توضیح داده شده چشمه‌ی پایسته در ساختنِ عناصرِ ماتریسِ پراکنده‌گی استفاده می‌شود.

مراجع

[1] L. Ryder, “Quantum Field Theory”, Cambridge U. Press, 2001, sec. 7.2.

[2] D. Balilin and A. Love, “Introduction to Gauge Field Theory”, Overseas press, 2004.

[3] P. Ramond, “Field Theory: A Modern Primer”, Basic Books, 1990.

[4] J.C. Taylor, “Gauge Theories of Weak Interactions”, Cambridge U. Press, 1976, ch. 11.

[۵] ا.ح. فتح‌اللهی، فرمول‌بندیِ همیلتونیِ الکترودینامیک،

http://afat.ir/fat-116.pdf