FAT-101

مشابه‌یابی برای ِ مسائل ِ فیزیکی: خم‌های ِ کم‌ترین‌زمان و هم‌زمان

امیرحسین ِ فتح‌اللهی

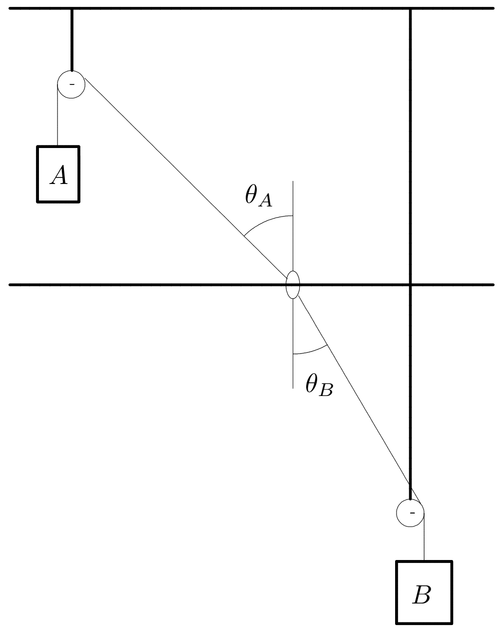
fatho@mail.cern.ch

چکیده: در این مقاله سعی می‌شود مثال‌هایی از یافتن و استفاده‌کردن از وجوه ِ مشترک ِ بین ِ دو مسئله‌ی فیزیکی برای ِ حل ِ یکی از آن مسائل بیان شود. به عنوان ِ مثال، مسئله‌ی خم‌های کم‌ترین‌زمان و هم‌زمان با استفاده از روش ِ مشابه‌یابی حل می‌شوند.

هنر ِ یافتن ِ وجوه ِ مشترک ِ دو مسئله‌ی به‌ظاهر متفاوت مهارتی است که یک فیزیک‌پیشه در زندگی ِ حرفه‌ای ِ خود باید یاد بگیرد. یک دید ِ پرورش‌یافته‌ی فیزیکی این قابلیت را دارد تا ورای جزئیات یا شلوغی‌های اطراف ِ دو پدیده‌ی فیزیکی، وجوه ِ مشترک ِ آنها را پیدا کند.

در این مقاله جنبه‌ها یی از هنر ِ مشابه‌یابی را یادآوری می‌کنیم. این کار را با ارائه‌ی دو نمونه، مسئله‌ی خم ِ کم‌ترین‌زمان و مسئله‌ی خم ِ هم‌زمان، انجام می‌دهیم. اما اول با یک مثال ِ ساده‌تر شروع می‌کنیم [1].

مسئله: حلقه‌ی سبکی روی ِ میله‌ی افقی ِ بدون ِ اصطکاکی حرکت می‌کند. به این حلقه دو نخ وصل شده‌است. طول ِ یکی از نخ‌ها L_A است. این نخ از روی قرقره‌ی ثابتی می‌گذرد و یک وزنه به جرم ِ m_A از آن آویزان است. نخ ِ دوم هم از روی قرقره‌ی ثابتی می‌گذرد و وزنه‌ای به جرم ِ m_B از آن آویزان است. طول ِ نخ ِ دوم L_B است. قرقره‌ها، میله، و وزنه‌ها در یک صفحه‌ی عمودی‌اند، شکل ِ ۱. وضعیت ِ تعادل ِ سیستم را بیابید.



شکل ِ ۱

در این مسئله‌ی مکانیک جای حلقه مورد سؤال است. یک دانش‌آموز ِ دبیرستانی برای حل ِ این مسئله هیچ مشکلی نخواهد داشت. (به شرط ِ این که دانش‌آموز ِ خیلی بدی نباشد!) زاویه‌ی نخ ِ اول با راستای ِ عمودی (در محل ِ اتصال ِ آن با حلقه) را θ_A و زاویه‌ی نخ ِ دوم با راستای ِ عمودی (در محل ِ اتصال ِ آن با حلقه) را θ_B می‌نامیم. با نوشتن ِ قوانین ِ تعادل برای حلقه و جرم‌ها به‌راحتی می‌توان رابطه‌ی بین ِ θ_A و θ_B را پیدا کرد. سپس با استفاده از طول‌های ثابت ِ مسئله مقدار ِ این دو زاویه تعیین می‌شود. در این‌جا سعی می‌کنیم این مسئله را به روش ِ دیگری حل کنیم، که تا حدی غیر ِ معمول است.

حالت ِ تعادل حالتی است که انرژی ِ پتانسیل را کمینه می‌کند. انرژی ِ پتانسیل می‌شود

$$\begin{aligned} U &= -m_A(L_A - l_A)g - m_B(h_0 + L_B - l_B)g \\ &= m_A l_A g + m_B l_B g + \text{ثابت} \end{aligned} \tag{1}$$

در این‌جا قرقره‌ی اول را مبدأ ِ پتانسیل گرفته‌ایم، h_0 اختلاف ِارتفاع ِ قرقره‌ی اول و دوم با هم است، و l_A و l_B فاصله‌ی حلقه از قرقره‌های به ترتیب اول و دوم اند. برای کمینه‌شدن ِ پتانسیل باید مقدار ِ غیر ِثابت ِ این عبارت کمینه شود. این کار با تنظیم ِ دو مقدار ِ مجهول ِ l_A و l_B انجام می‌شود. حالا یک مسئله در فیزیک ِ نور را یادآوری می‌کنیم. دو محیط ِ A و B داریم که یک صفحه آن‌ها را از هم جدا می‌کند. نور می‌خواهد از جایی در محیط ِ A به جایی در محیط ِ B برود. بنا بر اصل ِ کمترین‌زمان ِ فِرما، نور مسیری را انتخاب می‌کند که زمان ِ طی ِ آن کمینه باشد. اگر طول ِ مسیر در محیط‌های A و B را به ترتیب l_A و l_B بنامیم، زمان ِ طی ِ مسیر می‌شود

$$t = \frac{l_B}{v_B} + \frac{l_A}{v_A} \tag{2}$$

v_A و v_B سرعت ِ نور در به ترتیب محیط‌های ِ A و B اند. این‌جا هم l_A و l_B فاصله‌ی دو نقطه‌ی ثابت از یک نقطه‌ی مجهول‌اند، که نقطه‌ی مجهول روی خط ِ معینی است. جواب ِ این مسئله‌ی فیزیک ِ نور شناخته‌شده‌است و به آن قانون ِ شکست ِ نور می‌گویند:

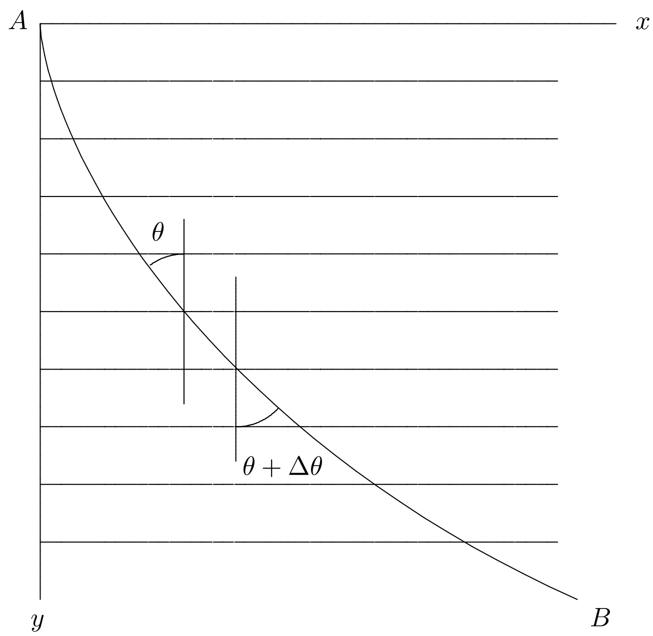
$$\frac{\sin\theta_B}{\sin\theta_A} = \frac{v_B}{v_A} \tag{3}$$

θ_A و θ_B زاویه‌ی مسیر ِ نور در دو محیط با راستای ِ عمود بر صفحه‌ی جداکننده‌ی دو محیط‌اند. با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی (1) و (2) می‌بینیم عبارت ِ زمان ِ طی ِمسیر دقیقاً شبیه ِ عبارت ِ پتانسیل است. پس شرط ِ کمینه‌شدن ِ پتانسیل هم می‌شود

$$\frac{\sin\theta_B}{\sin\theta_A} = \frac{1/(m_B g)}{1/(m_A g)} = \frac{m_A}{m_B} \tag{4}$$

از راه ِ تحلیل ِ نیروها هم همین جواب به دست می‌آید. در این‌جا یک مسئله‌ی مکانیک را با مشابهت با یک مسئله‌ی نوری حل کردیم. حالا به مسئله‌های ِ جالب‌تر ِ خم ِ کم‌ترین‌زمان و خم ِ هم‌زمان می‌رسیم.

مسئله‌ی خم ِ کم‌ترین‌زمان: دو نقطه‌ی A و B در میدان ِ گرانش ِ یک‌نواخت ِ روبه‌پایین را در نظر بگیرید. خمی را در نظر بگیرید که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند و یک ذره بدون ِ اصطکاک روی آن می‌لغزد و از نقطه‌ی بالایی به نقطه‌ی پایینی می‌رسد. برای کدام خم این زمان کمینه است؟



شکل ِ ۲

مبدأ ِ مختصات را نقطه‌ی بالایی، محور ِ x را افقی، و محور ِ y را عمودی و روبه‌پایین می‌گیریم، شکل ِ ۲. معادله‌ی این خم را با $y(x)$ نشان می‌دهیم. چون حرکت بدون ِاصطکاک است، از پایستگی ِ انرژی می‌توان سرعت ِ ذره را به دست آورد:

$$\frac{1}{2}mv^2(y) = mgy \Longrightarrow v(y) = \sqrt{2gy} \tag{5}$$

زمان ِ لازم برای طی ِ یک طول ِ بی‌نهایت‌کوچک ِ $\mathrm{d}s$ روی خم می‌شود

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v(y)}, \quad \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =: y' \tag{6}$$

پس زمان ِ کل می‌شود

$$t = \int \mathrm{d}t = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x \tag{7}$$

با استفاده از حساب ِ وردش‌ها، به‌سادگی می‌شود شرط ِ کمینه‌شدن ِ مقدار ِ این انتگرال را به دست آورد؛ درست شبیه ِ کار ی که برای ِ کمینه شدن ِ کنش در مکانیک کلاسیک می‌کنیم. دوباره می‌خواهیم مسئله را از یک راه ِ میان‌بُر حل کنیم. چون مسئله‌ی ما یافتن ِ خم ی است که زمان را کمینه کند، باز از دانسته‌های ِمان در فیزیک ِ نور استفاده می‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم خم ِ مورد ِنظر ِ مسیر ِ یک پرتوی ِ نور است [2]. می‌دانیم نور برای ِ این که یک مسیر خمیده بپیماید باید مرتباً شکسته شود. پس باید فرض کرد ضریب شکست محیطی که پرتوی ِ نور در آن حرکت می‌کند، با افزایش ِ y عوض می شود. برای یک لایه‌ی نازک (به ضخامت ِ $\mathrm{d}y$) در مسیر ِ پرتوی ِ نور قانون ِ شکست را می‌نویسیم، شکل ِ ۲:

$$\frac{\sin[\theta(y)]}{\sin[\theta(y+\mathrm{d}y)]} = \frac{n(y+\mathrm{d}y)}{n(y)} \tag{8}$$

θ زاویه‌ی پرتوی نور با راستای عمودی است. از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود

$$n(y)\sin[\theta(y)] = \text{ثابت} \tag{9}$$

ضریب ِشکست برای مسئله‌ی ما می‌شود

$$n = \frac{c}{v(y)} = \frac{c}{\sqrt{2gy}} \tag{10}$$

از این‌جا، و با استفاده از

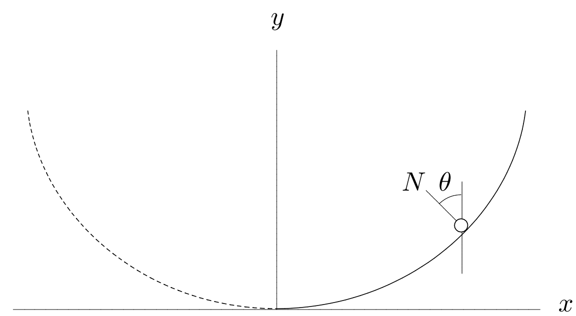
$$\sin[\theta(y)] = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \tag{11}$$

نتیجه می‌شود

$$y(1+y'^2) = a > 0 \tag{12}$$

که در آن a ثابت است. جواب ِ این معادله‌ی دیفرانسیل شناخته شده است [3]:

$$\begin{aligned} x(\beta) &= \frac{a}{2}(\beta - \sin\beta) \\ y(\beta) &= \frac{a}{2}(1 - \cos\beta) \end{aligned} \tag{13}$$



شکل ِ ۳

که معادله‌ی پارامتری ِ یک چرخ‌زاد است. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند با استفاده از حساب ِ وردش‌ها درستی ِ این حل را بیازماید.

مسئله‌ی خم ِ هم‌زمان: یک میدان ِ گرانش ِ یک‌نواخت ِ روبه‌پایین در نظر بگیرید. کدام خم است که زمان ِ لازم برای رسیدن ِ یک ذره به پایین‌ترین نقطه‌ی آن مستقل از ارتفاع ِ رهاکردن ِ ذره است؟ حرکت را بدون ِ اصطکاک فرض کنید.

محور ِ x را افقی و محور ِ y را عمودی و روبه‌بالا می‌گیریم، شکل ِ ۳. فرض کنید ذره را از نقطه‌ی $(x_0 = x(y_0), y_0)$ رها کنیم. برای راحتی متغیر را y و تابع را x می‌گیریم. چنان‌که در مسئله‌ی قبل به دست آمد، زمان ِ لازم برای ِ طی ِ مسافت ِ بین ِ دو نقطه می‌شود

$$t(y_0) = \int_0^{y_0} \sqrt{\frac{1 + x'^2}{2g(y_0 - y)}} \mathrm{d}y, \quad x' := \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \tag{14}$$

مسئله‌ی ما یافتن ِ خمی است که برای آن زمان ِ t مستقل از y_0 و برابر ِ T باشد. یک روش ِ حل ِ این مسئله استفاده از تبدیل ِ لاپلاس است [2]. در این‌جا می‌خواهیم روش ِ دیگر ی بر اساس ِ مشابه‌یابی معرفی کنیم.

حرکت ِ رفت‌وبرگشتی‌یی می‌شناسیم که دوره‌ی آن مستقل از دامنه‌ی نوسان است: نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ. پس کافی است در مسئله‌ی‌مان یک حرکت ِ رفت‌وبرگشتی پیدا کنیم. این کار، با گسترش ِ خم بعد از مقدار ِ کمینه‌اَش به‌سادگی انجام می‌شود. قرینه‌ی خم نسبت

به محور ِ y را به‌دست می‌آوریم و آن را به خم ِ اولیه می‌افزاییم. حرکت روی این خم ِ جدید رفت‌وبرگشتی است. برای ِ این‌که از شباهت با نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ استفاده کنیم، باید شتاب ِ حرکت در یک راستا را با شتاب ِ یک نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ یکی بگیریم. این جهت را y می‌گیریم. معادلات ِ حرکت می‌شود

$$\begin{aligned} N\cos\theta - mg &= m\ddot{y} \\ -N\sin\theta &= m\ddot{x} \end{aligned} \tag{15}$$

N نیروی عمود بر خم، و θ زاویه‌ی عمود برخم با راستای عمودی است. داریم

$$\begin{aligned} &\tan\theta = \frac{1}{x'}, \quad \cos\theta = \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x'^2}}, \\ &\dot{x} = x'\dot{y}, \quad \ddot{x} = x'\ddot{y} + x''\dot{y}^2 \end{aligned} \tag{16}$$

با حذف ِ N خواهیم داشت

$$-x'x''\dot{y}^2 - x'^2\ddot{y} - g = \ddot{y} \tag{17}$$

حالا وقت ِ آن است که شرط ِ حرکت ِ هم‌آهنگ را روی ِ مؤلفه‌ی y اعمال کنیم:

$$\ddot{y} = -\alpha y + c \tag{18}$$

که در آن $\alpha = 4\pi^2/(2T)^2$ (دوره $2T$ است). c ثابتی است که به y_0 وابسته است. با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (18) داریم

$$\dot{y}^2 = \alpha(y_0^2 - y^2) - 2c(y_0 - y) \tag{19}$$

که در آن فرض شده $\dot{y}(0) = 0$, $y(0) = y_0$. هم‌چنین از آن‌جا که در $t = T$ ($y = 0$) سرعت ِ عمودی صفر است $\alpha y_0 = 2c$. با ترکیب ِ روابط ِ (17) تا (19)،

$$-x'x''[\alpha(y_0^2 - y^2) - 2c(y_0 - y)] - x'^2(-\alpha y + c) - g = -\alpha y + c \Longrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&-x'x''[\alpha(y_0^2-y^2)-2c(y_0-y)]-(1+x'^2)(-\alpha y+c)=g \Longrightarrow \\
&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\{(1+x'^2)[\alpha(y_0^2-y^2)-2c(y_0-y)]\}=2g
\end{aligned} \tag{20}
$$

با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
&(1+x'^2)[\alpha(y_0^2-y^2)-2c(y_0-y)]=2g(y_0-y) \Longrightarrow \\
&(1+x'^2)(\alpha y+\alpha y_0-2c)=2g
\end{aligned} \tag{21}
$$

سرانجام، با جاگذاری ِ $\alpha y_0 = 2c$،

$$
y(1+x'^2)=\frac{2g}{\alpha}=\frac{2gT^2}{\pi^2} \tag{22}
$$

که همان چیزی است که از حل ِ مسئله با تبدیل ِ لاپلاس به دست می‌آید. جواب ِ این معادله‌ی دیفرانسیل منحنی ِ چرخ‌زاد است [3]:

$$
\begin{aligned}
x(\beta)&=\frac{gT^2}{\pi^2}(\beta+\sin\beta) \\
y(\beta)&=\frac{gT^2}{\pi^2}(1-\cos\beta)
\end{aligned} \tag{23}
$$

برای اطلاعات ِ بیش‌تر در مورد ِ سابقه‌ی تاریخی ِ این مسئله‌ها می‌توانید به [4] مراجعه کنید.

مرجع‌ها

[1] مثال ِ ساده‌ی این مقاله و هم‌چنین راه‌ِحل ِ مسئله‌ی خم ِ کم‌ترین‌زمان از یکی از شماره‌های ِ قدیمی ِ مجله‌ی یکان گرفته شده است.

[2] طرح و حل ِ مسئله‌ی خم ِ کم‌ترین‌زمان به روش ِ نوری منتسب به یوهان برنولی است.

[3] W. E. Boyce and R. C. DiPrima; “Elementary differential equations and boundary value problems”, fifth edition (John Wiley and Sons Inc., 1992).

[4] S. Chandrasekhar; “The problem of the brachistochrone” in “Newton’s Principia for the common reader”, (Oxford University Press, 1996) 571–578.