

هیچ مسئله‌ای ساده‌ی ساده نیست¹

امیرحسین فتح‌اللهی

دانش‌جوی دکتری فیزیک دانش‌گاه صنعتی شریف

fatho@mail.cern.ch

مسئله: تکه یخی به جرم m_0 با سرعت v_0 در دمای صفر درجه روی یک سطح افقی (در دمای صفر) شروع به حرکت می‌کند. مقدار یخی که تا زمان ایستادن قطعه ذوب می‌شود چقدر است؟

شاید نخستین راه حلی که به ذهن خیلی‌ها (از جمله خود من) می‌رسد این است که کار نیروی اصطکاک تا زمان ایستادن یخ را معادل با گرمای ایجاد شده بگیریم و این مقدار را عامل ذوب یخ بدانیم، یعنی:

$$W_f = -\frac{1}{2}m_0v_0^2 = -E_0 \quad (1)$$

$$|W_f| = Q = A \cdot L_f \quad (2)$$

اما در این راه حل یک چیز در نظر گرفته نشده است. مقداری از یخ که ذوب می‌شود (و از قطعه جدا می‌شود) هنوز دارای انرژی جنبشی است. آب به دست آمده از ذوب پس از پیمودن مسافتی می‌ایستد و این عمل باعث گرم‌تر شدن آب از دمای صفر می‌شود (فرض کنید سطح افقی تغییر دما ندارد). پس باید در تحلیل خود این مقدار انرژی جنبشی را که صرف گرم شدن آب می‌شود در نظر بگیریم.

¹چاپ شده در فیزیک (مجله‌ی دانش‌جویی انجمن فیزیک) سال اول، شماره‌ی اول، تابستان ۱۳۷۶.

چون هر مقدار از یخ که ذوب می‌شود با همان سرعت قطعه یخ از آن جدا می‌شود، سرعت نسبی آب و قطعه در لحظه‌ی جدا شدن صفر است (به زبان کتاب فیزیک هالیدی برای حرکت اجسام با جرم متغیر $v_{rel} = 0$) پس نیروی وارد بر قطعه یخ فقط ناشی از اصطکاک با سطح است، یعنی:

$$F_{ext} = m(t)a, \quad F(t) = -\mu m(t)g, \quad (3)$$

(ضریب اصطکاک μ) که نتیجه می‌دهد:

$$a = -\mu g \quad (4)$$

و سرعت لحظه‌ای برابر است با:

$$v(t) = -\mu g t + v_0, \quad (5)$$

$$0 \leq t \leq \frac{v_0}{\mu g} \quad (6)$$

با توجه به نمودار زیر:

$$\text{ذوب یخ} \rightarrow \text{کند کردن قطعه} \rightarrow \text{کار نیروی اصطکاک} \quad (7)$$

داریم:

$$\Delta W_f = \mu m(t)g \Delta x = \Delta m L_f \quad (8)$$

که در آن

$$\Delta m = m(t + \Delta t) - m(t) < 0 \quad (9)$$

پس خواهیم داشت

$$\mu g m(t) v(t) = -\frac{dm}{dt} L_f \quad (10)$$

با قرار دادن $v(t)$ و حل معادله‌ی دیفرانسیل داریم

$$\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) = \frac{\mu^2 g^2}{2L_f} t^2 - \frac{\mu g}{L_f} v_0 t + d \quad (11)$$

که در آن d ثابت انتگرال‌گیری است و به دست می‌آید

$$t = 0 \rightarrow m(t = 0) = m_0 \rightarrow d = 0 \quad (12)$$

که با توجه به آن جرم لحظه‌ای به دست می‌آید

$$m(t) = m_0 \exp\left(\frac{\mu^2 g^2}{2L_f} t^2 - \frac{\mu g}{L_f} v_0 t\right), \quad 0 \leq t \leq \frac{v_0}{\mu g} \quad (13)$$

برای به دست آوردن جرم یخ ذوب شده به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$A = m(t = 0) - m\left(t = \frac{v_0}{\mu g}\right) = m_0 - m_0 \exp\left(\frac{-v_0^2}{2L_f}\right) \quad (14)$$

در نتیجه

$$A = m_0 \left(1 - \exp\left(\frac{-v_0^2}{2L_f}\right)\right) \quad (15)$$

برای حالتی که گرمای نهان ذوب یخ خیلی بزرگ باشد (و انرژی جنبشی حمل شده توسط آب حاصل از ذوب یخ بتواند صرف نظر کرد) داریم

$$A \simeq m_0 \left(1 - 1 + \frac{v_0^2}{2L_f} - \dots\right) \simeq \frac{m_0 v_0^2}{2L_f} \quad (16)$$

که همان جواب حاصل از راه حل ساده انگارانه‌ی مسئله است. دمای آب حاصل از ذوب را می‌توان به دست آورد.

$$\Delta E = C \Delta m \theta(t) \quad (17)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m v^2(t) \quad (18)$$

که در آن C گرمای ویژه‌ی آب و ΔE تغییر در انرژی آب است. با استفاده از روابط (17) و (18) داریم

$$\theta(t) = \frac{v^2(t)}{2C} \quad (19)$$

که در آن $\theta(t)$ ، دمای آب ذوب شده در زمان t ، پس از توقف است. بد نیست فرض‌هایی را که خودآگاه و یا ناخودآگاه وارد کرده‌ایم یادآوری کنیم.

(۱) از کار نیروی وزن در اثر تغییر ارتفاع مرکز جرم قطعه (بر اثر ذوب شدن) چشم‌پوشی کرده‌ایم.

(۲) فرض کرده‌ایم که آب حاصل از ذوب یخ بلافاصله از یخ جدا می‌شود و تا لحظه‌ی توقف حرکت آن مستقل است.