

یادداشتی بر سیستمِ آحاد و ثوابتِ فیزیکی

امیرحسین فتح‌اللهی

fatho@mail.cern.ch

اغلب گفته می‌شود که کمیت‌های اصلی سه تا هستند: جرم، طول و زمان؛ و اغلب بُعد آن‌ها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$[جرم] = M, \quad [طول] = L, \quad [زمان] = T. \quad (1)$$

آیا بار الکتریکی هم یک کمیت اصلی است؟ از آزمایش، مثلاً از آزمایش کولن، به دست می‌آوریم که نیرو با مقدار حاصل ضرب دو بار و با عکس‌مجذور فاصله متناسب است:

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (2)$$

برای تبدیل این تناسب به تساوی حداقل دو قرارداد وجود دارد:

$$\begin{aligned} \text{سیستم آحاد SI} : \quad F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \\ \text{سیستم آحاد cgs} : \quad F &= \frac{q_1 q_2}{r^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

در اولی ϵ_0 گذردهی خلاء نامیده می‌شود که بنا به تعریف واحداش $\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{C}^2$ است که در آن C علامت واحد بار، کولن، است. به این ترتیب مقدار بار بر واحد زمان،

یعنی جریان، در سیستم SI یک کمیت اصلی به شمار می‌رود، که البته بعد مستقل نیز دارد. بعد بار را Q نمایش می‌دهیم:

$$[بار]_{SI} = Q. \quad (4)$$

ولی در سیستم cgs، واحد بار بر حسب واحدهای جرم، طول، و زمان بیان می‌شود. این واحد، واحد الکترواستاتیک (esu) نام دارد.

$$1 \text{ esu} = 1 \text{ gr}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{sec}^{-1},$$

$$[بار]_{\text{cgs}} = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}. \quad (5)$$

پس در سیستم آحاد cgs، بر خلاف سیستم SI، جریان الکتریکی یک کمیت اصلی نیست.

درسی که از مثال بالا می‌گیریم این است که تعداد کمیت‌های اصلی به سیستم آحاد وابسته است. در واقع، یکی از تفاوت‌های سیستم‌های آحاد با هم، در این است که ثوابت فیزیکی‌ای، که برای تساوی برقرار کردن بین دو طرف یک رابطه‌ی تناسبی لازم‌اند، چند و با چه واحدی انتخاب می‌شوند.

واقعیت این است که نتیجه‌ی هر آزمایشی در آزمایش‌گاه تنها یک عدد بی‌بعد است. مثلاً وقتی می‌گوییم «طول این میز ۳ متر است» یعنی این که نسبت طول این میز به یک طول واحد استاندارد عدد بدون بعد ۳ است. هر رابطه‌ی فیزیکی در واقع رابطه‌ای، تساوی یا تناسب، بین این اعداد بدون بعد است. واضح است که همیشه می‌توان با تعویض واحدهای اولیه کاری کرد تا ثوابت فیزیکی جدید وارد نشوند، و در نتیجه کمیت اصلی جدیدی به وجود نیاید.

بیا بید یک مثال دیگر را هم بررسی کنیم. قانون تجربی برای یک مول گاز کامل رابطه‌ی تناسب

$$PV \propto T, \quad (6)$$

یا تساوی

$$\frac{PV}{T} = \text{ثابت}, \quad (7)$$

است. به طور معمول ثابتی که در بالا انتخاب می‌شود - که البته رابطه‌ی تناسب را نیز به تساوی تبدیل می‌کند - ثابت گازها (R) می‌نامند، که در سیستم SI بُعد اش $N \cdot m \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$ است. در این جا N (نیوتن) واحد نیرو است ($1 N = 1 kg \cdot m \cdot s^{-2}$) و K (کلوین) واحد دما است. از این رو در سیستم SI دما یک کمیت اصلی با واحد کلوین است. اما به راحتی دیده می‌شود که با تعویض واحد دما می‌توان ثابت گازها را 1، یا هر عددی بی‌بُعد دل‌خواه دیگری کرد. پس در چنین سیستم آحادی، که آن را سیستم X می‌نامیم، خواهیم داشت:

$$[دما]_X = M L^2 T^{-2}. \quad (8)$$

یعنی بُعد دما، همان بُعد انرژی است.

آیا سیستم آحادی هست که حتی جرم، طول و زمان نیز در آن کمیات اصلی نباشند؟ شاید عجیب باشد، ولی جواب مثبت است! برای این که بین طول و زمان یکی را به نفع دیگری حذف کنیم، باید ثابتی پیدا کنیم که از این دو ساخته می‌شود؛ این ثابت ممکن است مثلاً سرعت یا شتاب باشد. مثلاً می‌توان شتاب جاذبه روی زمین ($g \sim 9.8 m \cdot s^{-2}$) را انتخاب کرد. با بی‌بُعد، و در صورت تمایل یک کردن این ثابت، به سیستم آحاد Y رفته‌ایم که در آن، مثلاً طول کمیت اصلی و زمان یک کمیت فرعی است:

$$[طول]_Y = L, \quad [زمان]_Y = L^{1/2}. \quad (9)$$

یک انتخاب ساده‌ی دیگری یک ثابت با بُعد سرعت است؛ مثلاً سرعت نور. در این صورت داریم:

$$[طول]_Z = L, \quad [زمان]_Z = L. \quad (10)$$

این کار را می‌شود ادامه داد. برای حذف یکی از طول و جرم به نفع دیگری باید یک ثابت دیگر که شامل هر دو باشد پیدا کرد، که از میان بسیاری می‌توان \hbar را انتخاب کرد. در این صورت داریم:

$$[z'] = M, \quad [z'] = M^{-1}, \quad [z'] = M^{-1}. \quad (11)$$

در این سیستم آحاد همه‌ی کمیات با واحد جرم سنجیده می‌شوند! در این آحاد ثابت گرانش بُعد M^{-2} دارد، و با بی‌بُعد کردن آن به سیستم آحادی می‌رسیم که در آن هیچ کمیت بُعد داری نیست: تمام کمیات بی‌بُعد اند. به این سیستم، سیستم «آحاد طبیعی» می‌گویند. این سیستم آحاد برای افرادی که می‌خواهند در گرانش کوانتومی کار کنند آشنا و مفید است.

اگرچه با بحث بالا به نظر می‌رسد که ثابت فیزیکی هر مقداری را می‌گیرند، و به این تعبیر «ساخته‌ی دست بشر» هستند، ولی باید توجه داشت که این فقط برای ثابت بُعد صحیح است، نه آن‌ها که بُعد دارند. ثابت بی‌بُعد در هر سیستم آحادی یک عدد مشخص دارند. یک مثال معروف ثابت ساختار ریز α است با تعریف:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \Big|_{\text{cgs}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \Big|_{\text{SI}} \simeq \frac{1}{137.036}, \quad (12)$$

که در آن e بار الکترون و c سرعت نور است. توجه داریم که اگرچه مقدار عددی هر یک از ثابت‌های e ، \hbar و c در دو سیستم آحاد متفاوت است، مقدار ثابت بی‌بُعد α یکسان است. به همین دلیل است که جهانی که در آن کمیت‌ها در سیستم cgs سنجیده می‌شوند با جهانی که در آن از سیستم SI استفاده می‌شود یکسان است.

از همین جا می‌توان نکته‌ای را در مورد نظریه‌هایی عنوان کرد که در مورد تغییر ثابت فیزیکی در طول زمان یا مکان بحث می‌کنند. در بعضی از این نظریه‌ها بحث در مورد ثابت‌هایی است که بُعد دارند؛ مثلاً بحث می‌شود که آیا سرعت نور در لحظات اولیه‌ی عالم کم‌تر یا بیش‌تر از اکنون بوده است یا نه؟ با بحثی که در این جا ارائه شد معلوم می‌شود که این سوال اساساً سوال معنی‌داری نیست! همان‌طور که در بالا دیده شد، می‌توان هر عدد دل‌خواهی را به ثابت بُعد نسبت داد، اما در نتیجه‌ی این کار ثابت بی‌بُعد عوض نمی‌شوند. در این صورت، هیچ تغییر اساسی انجام نشده است به غیر از اعمال سلیقه در استفاده از یک سیستم آحاد خاص. تنها سوال معنی‌دار از این نوع به آن‌هایی بر می‌گردد که در مورد تغییرات ثابت بی‌بُعد است. برای این که موضوع روشن شود اجازه بدهید یک مثال دیگر بزنیم. فرض کنید شما به عنوان یک فیزیک‌پیشه‌ی تجربی کار یک

روز صبح به آزمایش‌گاه می‌روید و مقدار \hbar را اندازه می‌گیرید، و اتفاقاً عددی به دست می‌آورید که با آن چه باید باشد نمی‌خواند! حال چه باید کرد؟ جواب این است که شما باید یک ثابت بدون بُعد، مثلاً α را اندازه بگیرید. فرض کنید که مقدار شناخته شده‌ی $\frac{1}{137}$ را به دست آورید. در این صورت یکی از پیش آمده‌های زیر اتفاق افتاده است:

- شما اشتبهاً وارد آزمایش‌گاه هم‌کار خود شده‌اید که از دست‌گاه‌هایی استفاده می‌کند که در سیستم آحاد دیگری مدرج شده‌اند. شاید هم شما را شبانه ربوده و به کشور دیگری برده‌اند که در آن سیستم آحاد دیگری رایج است، ولی برای این که شما متوجه نشوید روی واحدهای دست‌گاه‌ها برچسب دیگری زده‌اند. در این صورت چیزی را که مثلاً شما با جریان سنج 1 آمپر می‌خوانید، 1 در واحد دیگری است.

- به‌تر است اندازه‌گیری \hbar را تکرار کنید – احتمالاً اشتباهی کرده‌اید! شاید هم دست‌گاه شما خراب است – به آن چند ضربه بزنید، و اگر درست شدنی نیست باید از بودجه‌ی پژوهشی خودتان یک دست‌گاه نو بخرید!

بحث بالا را برای هر تعداد از ثابت‌های بُعددار می‌توان تکرار کرد. اما بیایید حالتی را تصور کنیم که در آن نه تنها \hbar بلکه مقدار α هم متفاوت به دست می‌آید، و شما مطمئن هستید که اشتباهی در اندازه‌گیری رخ نداده است. در این صورت، اولاً باید به شما تبریک گفت! چون حتی اگر برنده‌ی جایزه‌ی نوبل همان سال اعلام شده باشد، مطمئناً شما برنده‌ی سال دیگر خواهید بود! ثانیاً شما باید متوجه باشید که اتفاق مهم مربوط به مقدار α است، نه \hbar . در واقع با عوض کردن سیستم آحاد می‌توان کاری کرد که مقدار \hbar عوض نشده باشد، ولی در عوض مثلاً مقدار c متفاوت باشد. پس این سوال که عوض شدن α به تغییرات \hbar مربوط است یا c سوال معنی‌داری نیست – عوض شدن α فقط به عوض شدن خودش مربوط است!

قدردانی: انگیزه‌ی نوشتن این یادداشت خواندن مقاله‌ی [1] و بحث‌هایی است که نگارنده با دکتر خرمی داشته است.

0 یادداشت‌ها و مراجع‌ها

- [1] M. J. Duff, "Comment On Time-Variation Of Fundamental Constants,"
hep-th/0208093.