

شکل قطره‌ی چرخان روی سطح تخت افقی

محبوبه زارع‌چاهوکی، امیرحسین فتح‌اللهی

چکیده: شکل یک قطره‌ی سیال چرخان در دو حالت با وزن و بی‌وزن مطالعه شده است. برای هر دو حالت نمونه‌های حل و شکل آن‌ها ارائه شده‌اند.

0 مقدمه

شکل یک قطره‌ی سیال روی یک سطح جامد تحت تاثیر اثرهای سطحی و توده‌ای تعیین می‌شود. در حالی که کشش سطحی γ و ضریب چسبندگی سیال-جامد σ به ترتیب روی سطح قطره و سطح تماس قطره با جامد تاثیر دارند، نیروهایی مانند وزن، روی توده‌ی قطره تاثیر می‌گذارند. تعادل بین این نیروها در نهایت شکل قطره را تعیین می‌کند. اختلاف فشار دو طرف سطح سیال بر اساس رابطه‌ی یانگ-لاپلاس به انحنا‌ی میانگین سطح و کشش سطحی مربوط می‌شود:

$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1)$$

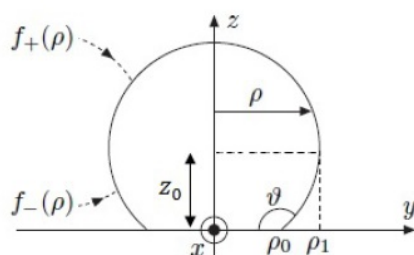
که در آن R_1 و R_2 شعاع انحناهای اصلی هستند [۱]. هم‌چنین در شرایط تعادل در نقطه‌ی تماس سه فاز جامد-سیال-بخار، زاویه‌ی تماس ϑ از رابطه‌ی یانگ به دست می‌آید:

$$\cos \vartheta = \frac{\sigma}{\gamma} - 1 \quad (2)$$

برای یک قطره با تقارن محوری، مطابق شکل (۱) تابع فقط به $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ بسته‌گی دارد، یعنی $z = f(\rho)$ و انحنا‌ی میانگین از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۱]

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{|f'|}{\sqrt{1+f'^2}} \right) \quad (3)$$

برای قطره بدون اثر وزن و بدون دوران می‌توان نشان داد که شکل قطره بخشی از کره است (رجوع شود به [۱]). با استدلال ساده‌ی هندسی برای کره‌ای که فاصله‌ی مرکزش تا مبدا z_0 است

شکل ۱: قطره‌ای با زاویه‌ی تماس $\vartheta > 90^\circ$

می‌توانیم بنویسیم

$$\cos \vartheta = -\frac{z_0}{R} \quad (4)$$

که در آن R شعاع کره است. هم‌چنین برای شعاع با استفاده از حجم یک قطاع کره داریم:

$$V = \frac{\pi R^3}{3} (1 - \cos \vartheta)^2 (2 + \cos \vartheta) \quad (5)$$

شعاع تماس قطره با جامد، شعاع در ناحیه‌ی شکم، و محل قله‌ی قطره نیز به دست می‌آیند:

$$\rho_0 = R \sin \vartheta, \quad \rho_1 = R, \quad h_0 = R + z_0 \quad (6)$$

در حالی که شتاب جاذبه وجود داشته باشد لایه‌های قطره به صورت فشار هیدروستاتیکی در اختلاف فشار سهم دارند. اگر μ جرم حجمی قطره و g شتاب جاذبه باشد داریم:

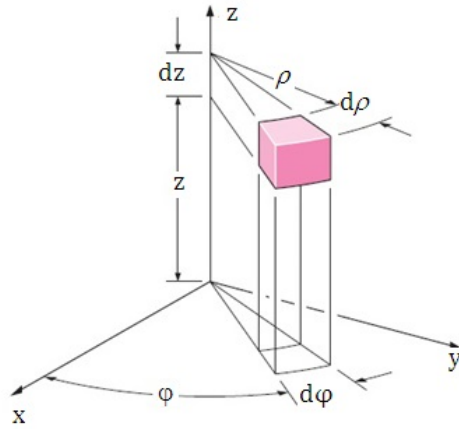
$$\Delta P = \mu g (z - h) \quad (7)$$

شکل قطره با وجود وزن به طور گسترده مطالعه شده است (برای نمونه رجوع کنید به [۲]).

1 اثر چرخش در اختلاف فشار

چرخش به واسطه‌ی نیروی جانب مرکز باعث اختلاف فشار بیرون و داخل سیال می‌شود. نیروی شعاعی ناشی از اختلاف فشار دو رویه‌ی عقبی و جلویی در عنصر حجم شکل (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$(P + dP)(\rho + d\rho)d\phi dz(-\hat{e}_\rho) + P\rho d\phi dz(\hat{e}_\rho) \quad (8)$$



شکل ۲: عنصر حجم در مختصات استوانه‌ای

باید توجه داشت که دو سطح جانبی نیز روی مولفه‌ی شعاعی مولفه‌ی نیرو می‌دهند. توجه داریم که یکی از سطح‌ها در $\phi - \frac{d\phi}{2}$ و دیگری در $\phi + \frac{d\phi}{2}$ واقع شده است. به عنوان مثال داریم:

$$\hat{e}_\phi|_{\phi - \frac{d\phi}{2}} = -\hat{i} \sin\left(\phi - \frac{d\phi}{2}\right) + \hat{j} \cos\left(\phi - \frac{d\phi}{2}\right) \quad (9)$$

$$= -\hat{i}(\sin\phi - \cos\phi \frac{d\phi}{2}) + \hat{j}(\cos\phi + \sin\phi \frac{d\phi}{2})$$

که با توجه به رابطه‌ی

$$\hat{e}_\rho = \hat{i} \cos\phi + \hat{j} \sin\phi \quad (10)$$

مولفه‌ی نیروی یکی از سطوح جانبی به دست می‌آید:

$$\hat{e}_\phi|_{\phi - \frac{d\phi}{2}} \cdot \hat{e}_\rho = \frac{d\phi}{2} \quad (11)$$

با کنار هم گذاشتن تمام سهم‌ها برای عنصر جرم $dm = \mu \rho d\rho d\phi dz$ ، رابطه‌ی شتاب جانبی مرکز و فشار به شکل زیر به دست می‌آید:

$$(P + dP)(\rho + d\rho)d\phi dz - P\rho d\phi dz - P d\rho d\phi dz = \rho \omega^2 \mu \rho d\rho d\phi dz$$

که می‌دهد

$$\frac{dP}{d\rho} = \mu \omega^2 \rho$$

و حلی به شکل زیر دارد:

$$\Delta P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \rho^2 + \Delta p_\gamma \quad (12)$$

که در آن Δp_γ اختلاف فشار ثابت، ناشی از کشش سطحی سیال در قله‌ی قطره است. پس معادله‌ی یانگ-لاپلاس به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} d\left(\rho \frac{|f'|}{\sqrt{1+f'^2}}\right) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{2} \mu \omega^2 \rho^2 + \Delta p_\gamma\right) \quad (13)$$

با توجه به شکل (۱)، f_+ را برای نیمه بالا و f_- را برای نیمه‌ی پایین قطره در نظر می‌گیریم. با انتگرال‌گیری از معادله‌ی بالا روی تمام سطح قطره می‌توان به یک اتحاد رسید. اثبات برای قطره با زاویه‌ی تماس حاده و منفرجه متفاوت است ولی نتیجه یکسان است.

الف - زاویه‌ی تماس حاده ($\vartheta < 90^\circ$): برای $|f'_+|$ در طرف راست قطره داریم $|f'_+| = -f'_+$ و در نتیجه

$$-\int_0^{\rho_0} d\left(\rho \frac{f'_+}{\sqrt{1+f'^2_+}}\right) = \int_0^{\rho_0} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{2} \mu \omega^2 \rho^2 + \Delta p_\gamma\right) \rho d\rho$$

که در آن $\frac{\Delta p_\gamma}{\gamma} = 2\kappa$ در نظر می‌گیریم. برای قطره‌ای با ارتفاع h خواهیم داشت

$$f_+(\rho=0) = h, \quad f'_+(\rho=0) = 0$$

$$f_+(\rho=\rho_0) = 0, \quad f'_+(\rho=\rho_0) = -\tan \vartheta$$

اگر $a = \frac{\mu \omega^2}{8\gamma}$ باشد، با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی یانگ خواهیم داشت

$$-\rho_0 \frac{f'_+(\rho_0)}{\sqrt{1+f'^2_+(\rho_0)}} = a\rho_0^4 + \kappa\rho_0^2$$

$$\sin \vartheta = a\rho_0^3 + \kappa\rho_0 \quad (14)$$

چنانچه انتگرال را تا مقدار ρ بگیریم، اگر θ زاویه‌ی بین مماس بر سطح در ρ و جهت مثبت محور افقی باشد، به دست می‌آید

$$\sin \theta = a\rho^3 + \kappa\rho \quad (15)$$

ب- زاویه‌ی تماس منفرجه ($\vartheta > 90^\circ$): با استفاده از رابطه‌ی (13) و با انتگرال‌گیری از 0 تا ρ_1 ، با توجه به اینکه داریم:

$$f'_+(\rho_1) = -\infty$$

به دست می‌آید

$$1 = a\rho_1^3 + \kappa\rho_1 \quad (16)$$

با انتگرال‌گیری از ρ_1 تا ρ_0 دوباره اتحاد (14) برقرار می‌شود. پس در تمامی زوایای تماس ($0^\circ < \vartheta < 180^\circ$) اتحاد (14) برقرار است.

2 حل تحلیلی قطره‌ی بدون وزن چرخان

برای قطره با زاویه‌ی تماس حاده داریم

$$-\frac{f'_+(\rho)}{\sqrt{1+f'^2_+(\rho)}} = a\rho^3 + \kappa\rho \quad (17)$$

که با توجه به $f_+(\rho_0) = 0$ می‌دهد

$$f_+(\rho) = -\int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{\frac{a^2\rho'^6 + \kappa^2\rho'^2 + 2a\kappa\rho'^4}{1 - a^2\rho'^6 - \kappa^2\rho'^2 - 2a\kappa\rho'^4}} d\rho' \quad (18)$$

با انتگرال‌گیری عددی از رابطه‌ی بالا می‌توان به شکل قطره دست یافت. البته برای این کار لازم است تا مقدار κ و ρ_0 معلوم باشند. در ادامه خواهیم دید که با استفاده از رابطه‌ی حجم و اتحاد پیدا شده در بخش قبل می‌توان این مقدار را پیدا کرد. برای قطره‌ای با تقارن سمتی، حجم قطره به شکل زیر داده می‌شود

$$V = 2\pi \int_0^{\rho_0} \rho f_+(\rho) d\rho \quad (19)$$

که برای قطره با زاویه‌ی تماس حاده با انتگرال جزء به جزء می‌توان به صورت زیر نوشت

$$V = -\pi \int_0^{\rho_0} \rho^2 f'_+(\rho) d\rho \quad (20)$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (15) می‌توانیم بنویسیم

$$\cos \theta = (3a\rho^2 + \kappa) \frac{d\rho}{d\theta} \quad (21)$$

رابطه‌ی (20) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$V = -\pi \int_0^{\rho_0} \rho^2 \tan \theta \frac{d\rho}{d\theta} d\theta \quad (22)$$

با توجه به اینکه $\theta(\rho = 0) = \pi$ و $\theta(\rho = \rho_0) = \pi - \vartheta$ با ترکیب روابط (21) و (22) داریم

$$V = \pi \int_{\pi-\vartheta}^{\pi} \rho^2 \frac{\sin \theta}{(3a\rho^2 + \kappa)} d\theta \quad (23)$$

کافی است در رابطه‌ی بالا به جای ρ از رابطه‌ی (15) بر حسب θ قرار داد تا بتوان از آن مقدار κ را به دست آورد. با استفاده از رابطه (15) و با حل معادله‌ی درجه‌ی سوم داریم:

$$\rho = \left(\frac{\sin \theta}{2a} + \sqrt{\frac{\kappa^3}{27a^3} + \frac{\sin^2 \theta}{4a^2}} \right)^{1/3} + \left(\frac{\sin \theta}{2a} - \sqrt{\frac{\kappa^3}{27a^3} + \frac{\sin^2 \theta}{4a^2}} \right)^{1/3} \quad (24)$$

با استفاده از رابطه (24) و این که مقدار حجم را در رابطه (23) داریم می‌توان مقدار κ را به طور عددی تعیین کرد. با داشتن κ و استفاده از (14) مقدار ρ_0 پیدا می‌شود که با جاگذاری در (18) تابع پیدا می‌شود.

وقتی زاویه‌ی تماس منفرجه است ($\vartheta > 90^\circ$) برای حجم داریم:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\rho_1} \rho f_+(\rho) d\rho - 2\pi \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho f_-(\rho) d\rho \\ &= -\pi \int_0^{\rho_1} \rho^2 f'_+(\rho) d\rho + \pi \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho^2 f'_-(\rho) d\rho \end{aligned} \quad (25)$$

در این صورت با توجه به $\theta(\rho = \rho_1) = \pi/2$ می‌توان بر حسب زاویه نوشت:

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \rho^3 \frac{\sin \theta}{2a\rho^3 + \sin \theta} d\theta + \pi \int_{\pi-\vartheta}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \frac{\sin \theta}{2a\rho^3 + \sin \theta} d\theta \quad (26)$$

در به دست آوردن رابطه‌ی بالا با ضرب ρ در صورت و مخرج انتگرال ده مقدار $\kappa\rho$ از اتحاد (15) جاگذاری شده است. با حل عددی رابطه‌ی بالا برای حجم، می‌توان مقدار κ و از آنجا به کمک (14) و (16) می‌توان ρ_0 و ρ_1 را پیدا کرد. در این صورت برای دو تکه‌ی تابع داریم:

$$\begin{aligned} f_-(\rho) &= \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{\frac{a^2 \rho'^6 + \kappa^2 \rho'^2 + 2a\kappa \rho'^4}{1 - a^2 \rho'^6 - \kappa^2 \rho'^2 - 2a\kappa \rho'^4}} d\rho' \\ f_+(\rho) &= -\int_{\rho_1}^{\rho} \sqrt{\frac{a^2 \rho'^6 + \kappa^2 \rho'^2 + 2a\kappa \rho'^4}{1 - a^2 \rho'^6 - \kappa^2 \rho'^2 - 2a\kappa \rho'^4}} d\rho' + f(\rho_1) \end{aligned} \quad (27)$$

در بالا $f(\rho_1)$ از انتگرال اولی به دست می‌آید.

2.1 نمونه‌هایی از حل

در این قسمت نمونه‌هایی از حل‌هایی که در بخش قبل به دست آمد، ارائه می‌شوند. همان‌گونه که خواهیم دید برای هر قطره با مشخصات داده شده یک سرعت زاویه‌ای بحرانی وجود دارد چنان که اگر قطره با سرعتی بیش از آن بچرخد نمی‌توان برای قطره، حالت پایدار پیدا کرد. در واقعیت چنان است که اگر سرعت از یک مقدار بحرانی بیش‌تر باشد نیروهای سطحی نمی‌توانند نیروی جانب مرکز را تأمین کنند و در نتیجه قطره از هم می‌پاشد. با تحلیل ابعادی می‌توان بسته‌گی این مقدار بحرانی را به پارامترهای قطره به دست آورد. برای قطره با حجم V ، چگالی μ و کشش سطحی γ می‌توان کمیتی با بعد مجذور سرعت زاویه‌ای به شکل زیر درست کرد:

$$\omega_c^2 = \eta \frac{\gamma}{\mu V} \quad (28)$$

که در آن η ثابت بدون بعد است که با اطلاعات فعلی قابل محاسبه نیست ولی به مشخصات قطره بسته‌گی ندارد. در این صورت پیش‌بینی می‌شود برای دو قطره‌ی متفاوت داریم:

$$\frac{\omega_{c1}^2}{\omega_{c2}^2} = \frac{\gamma_1 \mu_2 V_2}{\gamma_2 \mu_1 V_1} \quad (29)$$

به وسیله‌ی رابطه‌ی بالا اگر مقدار بحرانی سرعت زاویه‌ای را برای یکی از قطره‌ها بدانیم برای دیگری نیز می‌توان محاسبه کرد.

برای حل‌های ارائه‌شده در زیر شعاع تماس با شرط $f(\rho_0) = 0$ ، ارتفاع قله با شرط $f(\rho = 0) = h$ ارائه شده‌اند.

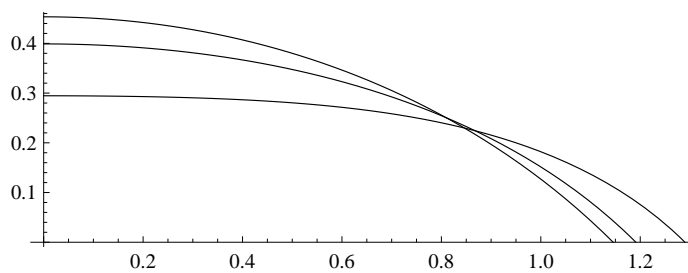
نکات قابل توجه در حل‌های ارائه‌شده به شرح زیراند:

(۱) برای یک قطره‌ی داده‌شده با افزایش سرعت زاویه‌ای همان‌طور که انتظار می‌رود شعاع تماس (و شعاع شکم برای قطره‌های با زاویه‌ی تماس منفی) افزایش و ارتفاع قله کاهش پیدا می‌کند.

(۲) در هر مورد آخرین سرعت زاویه‌ای داده شده مربوط به سرعت بحرانی است (بیشترین سرعتی که می‌توان حل پایدار داشت). همان‌طور که انتظار می‌رود این سرعت با افزایش چگالی یا کاهش کشش سطحی کاهش پیدا می‌کند. همچنین بین سرعت‌های بحرانی، رابطه‌ی (29) صادق است.

ϑ	ω s^{-1}	ρ_0 cm	h cm	κ cm^{-1}
$\vartheta = 45^\circ$	5	1.14544	0.453431	0.570011
	10	1.19119	0.398919	0.388959
	14	1.28987	0.294621	0.0778693

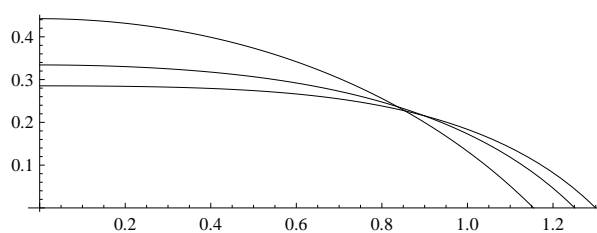
جدول ۱: مشخصات قطره: $\mu = 0.9 \frac{g}{cm^3}$, $\gamma = 78 \frac{dyn}{cm}$, $V = 1 cm^3$. شکل ۳.



شکل ۳: شکل حل‌ها با مشخصات ارائه شده در جدول ۱ با سرعت زاویه‌ای‌های متفاوت.

ϑ	ω s^{-1}	ρ_0 cm	h cm	κ cm^{-1}
$\vartheta = 45^\circ$	5	1.15446	0.442343	0.532405
	10	1.25053	0.334212	0.189529
	11	1.29942	0.28537	0.0530443

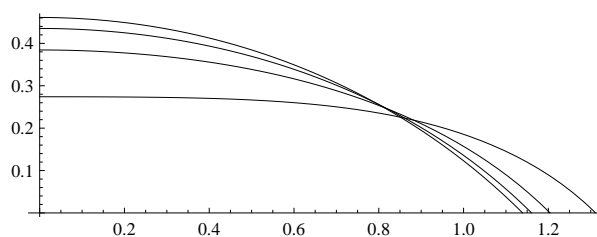
جدول ۲: مشخصات قطره: $\mu = 1.5 \frac{g}{cm^3}$, $\gamma = 78 \frac{dyn}{cm}$, $V = 1 cm^3$. شکل ۴.



شکل ۴: شکل حل‌ها با مشخصات ارائه شده در جدول ۲ با سرعت زاویه‌ای‌های متفاوت.

ϑ	ω	ρ_0	h	κ
$\vartheta = 45^\circ$	5	1.13927	0.461132	0.596333
	10	1.16033	0.435215	0.0508423
	15	1.20397	0.38444	0.342703
	20	1.31129	0.27407	0.023404

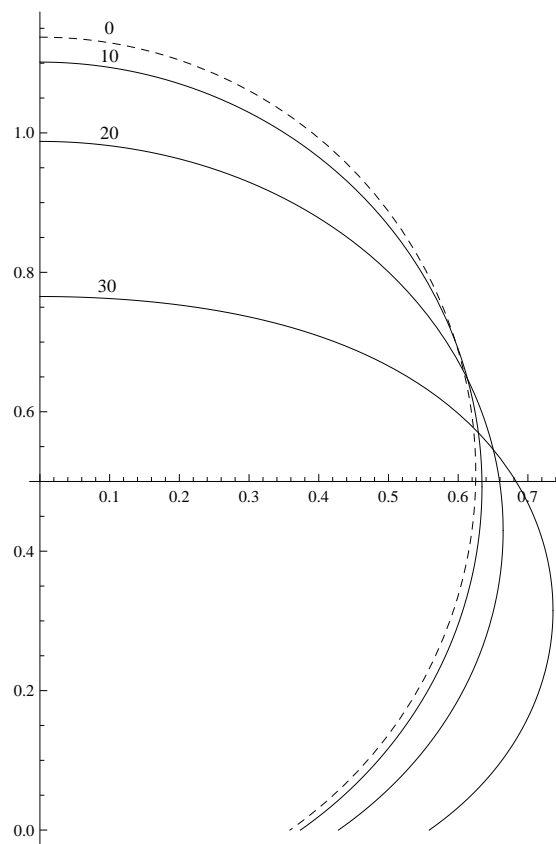
جدول ۳: مشخصات قطره: $\mu = 0.9 \frac{g}{cm^3}$, $\gamma = 150 \frac{dyn}{cm}$, $V = 1 cm^3$. شکل ۵.



شکل ۵: شکل حل‌ها با مشخصات ارائه شده در جدول ۳ با سرعت زاویه‌ای‌های متفاوت.

ϑ	ω s^{-1}	ρ_0 cm	ρ_1 cm	h cm	κ cm^{-1}
$\vartheta = 145^\circ$	0	0.358595	0.625192	1.13732	
	10	0.373697	0.634141	1.10157	1.51249
	20	0.428223	0.664485	0.987831	1.22189
	30	0.558436	0.736919	0.765335	0.577329

جدول ۴: مشخصاتِ قطرهِ: $\mu = 1 - \frac{g}{cm^3}$, $\gamma = 78 \frac{dyn}{cm}$, $V = 1 cm^3$. شکل ۶.

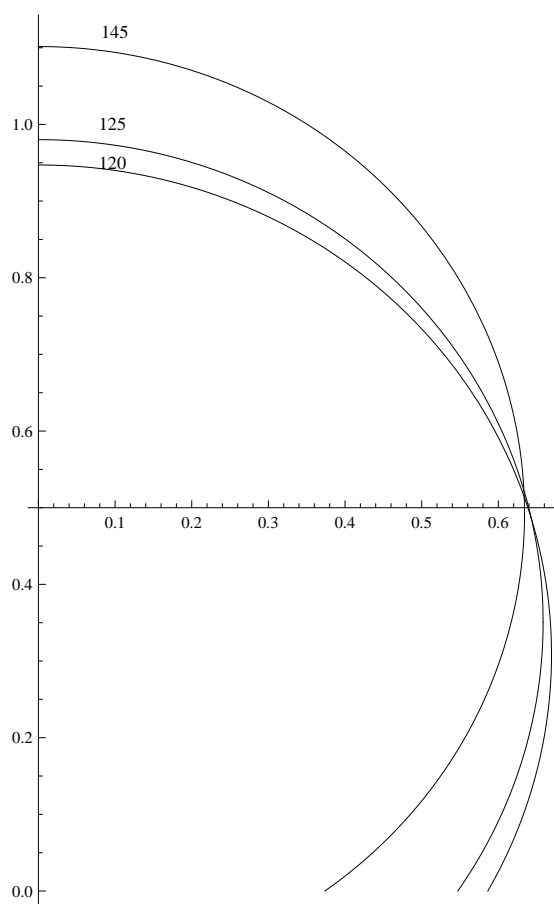


شکل ۶: شکلِ حل‌ها با مشخصاتِ ارائه شده در جدول ۴ با سرعتِ زاویه‌ای‌هایِ متفاوت.

شکل قطره‌ی چرخان روی سطح تخت افقی : FAT-115

ω s^{-1}	ϑ	ρ_0 cm	ρ_1 cm	h cm	κ cm^{-1}
$\omega = 10$	145°	0.373697	0.634141	1.10157	1.51249
	125°	0.547084	0.65841	0.980131	1.44934
	120°	0.586234	0.669347	0.947105	1.42219

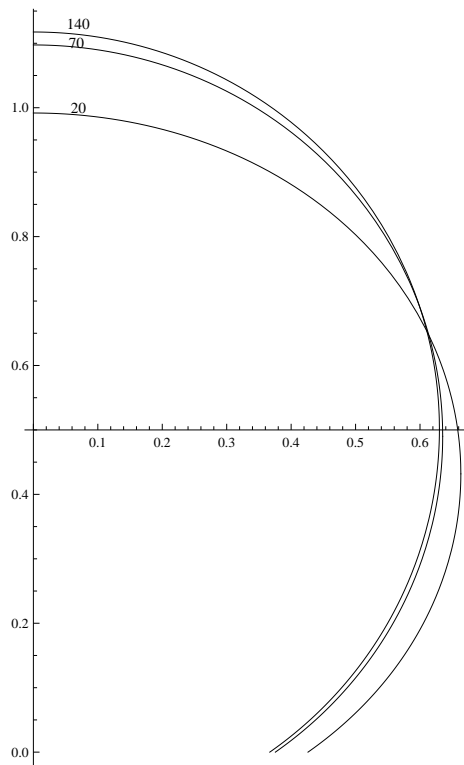
جدول ۵: مشخصات قطره: $\mu = 1 \frac{g}{cm^3}$, $\gamma = 78 \frac{dyn}{cm}$, $V = 1 cm^3$. شکل ۷.



شکل ۷: شکل حل‌ها با مشخصات ارائه شده در جدول ۵ با زاویه تماس‌های متفاوت.

	γ $\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$	ρ_0 cm	ρ_1 cm	h cm	κ cm^{-1}
$\vartheta = 145^\circ$	20	0.426157	0.663369	0.991804	1.23242
$\omega = 10 \text{ s}^{-1}$	70	0.375512	0.635196	1.09743	1.50227
	140	0.366838	0.630119	1.17752	1.55155

جدول ۶: مشخصات قطره: $\mu = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $V = 1 \text{ cm}^3$. شکل ۸.



شکل ۸: شکل حل‌ها با مشخصات ارائه شده در جدول ۶ با کشش سطحی‌های متفاوت.

3 حل عددی قطره‌ی وزن‌دار در حال دوران

در این بخش مسئله‌ی قطره‌ی دوار را با در نظر گرفتن وزن، بررسی می‌کنیم. از آن‌جا که در این مورد حل تحلیلی وجود ندارد باید از حل عددی معادله‌ی دیفرانسیل استفاده کنیم.

کمیت‌های مستقل اولیه‌ای که از یک قطره در اختیار داریم عبارتند از، حجم قطره، زاویه‌ی تماس، چگالی، کشش سطحی، سرعت زاویه‌ای و شتاب جاذبه، g . معادله یانگ-لاپلاس در مختصات استوانه‌ای با در نظر گرفتن اثر دوران و اثر وزن برای قطره می‌شود

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{f'_{\pm}}{\sqrt{1+f'_{\pm}}} \right) = \frac{\mu\omega^2\rho^2}{2\gamma} + 2\kappa + \frac{\mu g}{\gamma} (h - f_{\pm}) \quad (30)$$

که در این معادله $\kappa = \frac{\Delta P_{\gamma}}{\gamma}$ است که ΔP_{γ} اختلاف فشار ناشی از کشش سطحی در قله‌ی قطره در حضور وزن و دوران است. مشابه اتحاد (14) که برای حالت بدون وزن به دست آمد می‌توان با انتگرال‌گیری روی سطح قطره به یک اتحاد بین پارامترهای قطره دست یافت، که در این مورد می‌شود:

$$\kappa + \frac{\mu g}{2\gamma} h = \frac{\sin \vartheta}{\rho_0} - \frac{\mu\rho_0^2\omega^2}{8\gamma} + \frac{\mu g}{\gamma} \frac{V}{2\pi\rho_0^2} \quad (31)$$

با استفاده از این اتحاد می‌توان معادله‌ی یانگ-لاپلاس را به شکل زیر نوشت:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{f'_{\pm}}{\sqrt{1+f'_{\pm}}} \right) = \frac{\mu\omega^2\rho^2}{2\gamma} + 2 \left(\frac{\sin \vartheta}{\rho_0} - \frac{\mu\rho_0^2\omega^2}{8\gamma} + \frac{\mu g}{\gamma} \frac{V}{2\pi\rho_0^2} \right) - \frac{\mu g}{\gamma} f_{\pm} \quad (32)$$

حُسن رابطه‌ی بالا این است که تنها پارامتر نامعلوم در آن شعاع زاویه‌ی تماس ρ_0 است. برای حل این معادله از روش پرتابی استفاده می‌کنیم که در آن با انتخاب مقادیر مختلف شعاع تماس و شرط‌های

$$f(\rho_0) = 0 \quad f'(\rho_0) = -\tan \vartheta$$

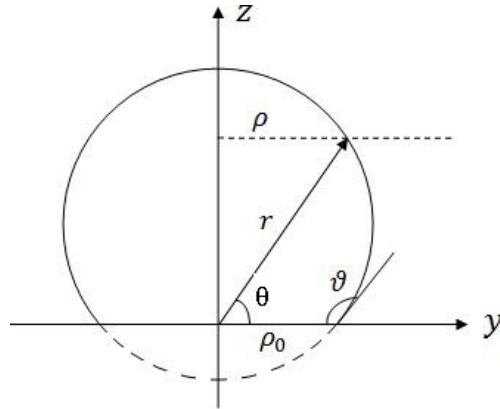
سعی در برآوردن شرط مرزی زیر داریم:

$$f'(\rho = 0) = 0$$

به عنوان نقطه شروع می‌توان از مقدار حل کروی برای شعاع تماس شروع کرد و با اضافه کردن تدریجی به دقت دلخواه رسید.

3.1 استفاده از مختصات قطبی

از آنجا که برای قطره‌های با زاویه‌ی تماس منفرجه تابع شکل دو تکه است، مناسب است تا معادله را در مختصات قطبی نوشت تا بتوان با یک تابع تمام سطح قطره را پوشش داد. مختصات انتخابی در شکل (۹) معرفی شده است.



شکل ۹: نمای حل کروی در مختصات قطبی

اگر r اندازه‌ی بردار مکان روی سطح قطره و θ زاویه‌ی قطبی نظیر آن باشد، داریم:

$$\rho = r(\theta) \cos \theta \quad (33)$$

$$f = r(\theta) \sin \theta \quad (34)$$

در این صورت خواهیم داشت

$$r(0^\circ) = \rho_0 \quad (35)$$

$$r'(90^\circ) = 0 \quad (36)$$

$$f' = \frac{df}{d\rho} = \frac{\frac{df}{d\theta}}{\frac{d\rho}{d\theta}} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta} \quad (37)$$

$$f'(\rho_0) = \left. \frac{df}{d\rho} \right|_{\rho_0} = \frac{r(0)}{r'(0)} \quad (38)$$

می‌دانیم که $f'(\rho_0) = -\tan \vartheta$. پس خواهیم داشت

$$r'(0) = -\rho_0 \cot \vartheta \quad (39)$$

$$f'' = \frac{df'}{d\rho} = \frac{2r'^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta) + r^2(\theta)}{(r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta)^3} \quad (40)$$

جواب معادله‌ی دیفرانسیل را با معیار جواب یعنی $r'(90^\circ) = 0$ چک می‌کنیم. در مختصات جدید معادله‌ی یانگ-لاپلاس به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d}{d\theta} \left(r \cos \theta \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right) = (r' \cos \theta - r \sin \theta) \left[\frac{\mu \omega^2}{2\gamma} (r \cos \theta)^3 + 2\xi (r \cos \theta) - \frac{\mu g}{\gamma} (r \sin \theta)(r \cos \theta) \right] \quad (41)$$

که در آن

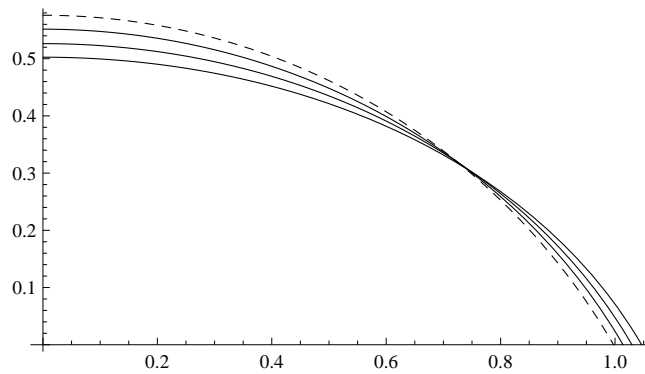
$$\xi = \frac{\sin \vartheta}{\rho_0} - \frac{\mu \rho_0^2 \omega^2}{8\gamma} + \frac{\mu g}{\gamma} \frac{V}{2\pi \rho_0^2}$$

3.2 نمونه‌های حل

در این‌جا به ارائه‌ی نمونه‌های حل عددی برای قطره‌ی وزن‌دار چرخان می‌پردازیم.

ϑ	g $\frac{cm}{s^2}$	ω s^{-1}	ρ_0 cm	h cm
	0	0	0.997458	0.575882
$\vartheta = 60^\circ$	50	0	1.01396	0.551751
	0	10	1.02953	0.526317
	50	10	1.464555	0.502576

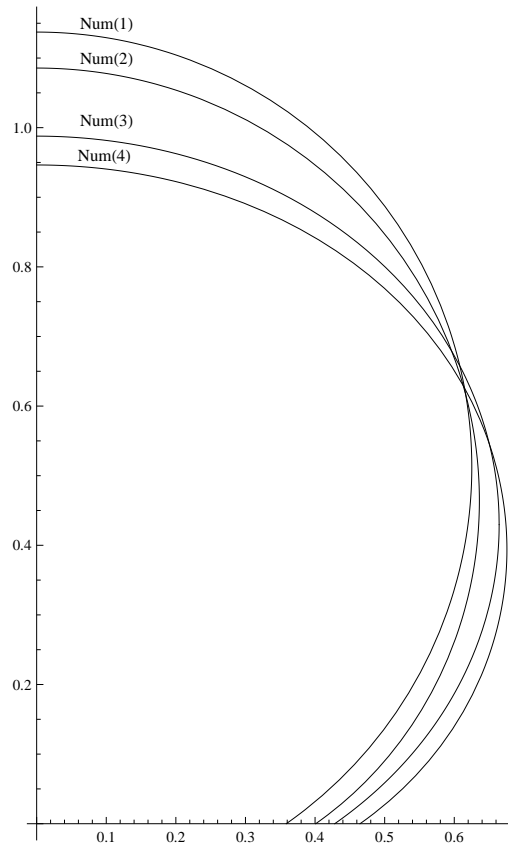
جدول ۷: مشخصات قطره: $\mu = 0.9 \frac{g}{cm^3}$ $\gamma = 78 \frac{dyn}{cm}$ $V = 1cm^3$. شکل ۱۰.



شکل ۱۰: شکل حل‌ها با مشخصات ارائه شده در جدول ۷ با شتاب جاذبه و سرعت زاویه‌ای‌های متفاوت.

ϑ	Number	g $\frac{cm}{s^2}$	ω s^{-1}	ρ_0 cm	h cm
$\vartheta = 145^\circ$	Num(1)	0	0	0.358595	1.13732
	Num(2)	20	0	0.400895	1.08564
	Num(3)	0	20	0.428223	0.987831
	Num(4)	20	20	0.464555	0.946395

جدول ۸: مشخصات قطره: $\mu = 1 \frac{g}{cm^3}$ $\gamma = 78 \frac{dyn}{cm}$ $V = 1cm^3$. شکل ۱۱.



شکل ۱۱: شکل حل‌ها با مشخصات ارائه شده در جدول ۸ با شتاب جاذبه و سرعت زاویه‌ای‌های متفاوت.

مراجع

- [۱] ا.ح. فتح‌اللهی، یادداشتی بر شکل قطره روی سطح تخت افقی، گاما، ص. ۸، ص. ۳۰.
- [۲] مختاری، ف. (۱۳۹۲). شکل قطره بر سطح خمیده، پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک نظری، دانشکده علوم پایه، دانشگاه الزهراء: ۸۱ صفحه