FAT-116

فرمول‌بندیِ همیلتونیِ الکترودینامیک

امیرحسینِ فتح‌اللهی

چکیده: این یادداشت گردآوریِ است درباره‌ی چه‌گونه‌گیِ فرمول‌بندیِ همیلتونیِ نظریه‌ی الکترودینامیکِ کلاسیک.

چگالیِ لاگرانژی و کنشِ الکترودینامیک در حضورِ چشمه‌ی J^μ به شکل زیر است:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu, \qquad S = \int d^4x\, \mathcal{L} \tag{1}$$

که در آن

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2}$$

نکته‌ی اول این‌که مشتقِ زمانیِ A_0 که در واقع سرعتِ آن است در کنش وجود ندارد. در نتیجه این متغیر دینامیکی نیست و مانند یک ضریبِ لاگرانژ عمل می‌کند که معادله‌اش یک قید می‌دهد. در واقع بخشِ شاملِ A_0 در کنش به شکل زیر است:

$$S = \int d^4x \left(\cdots - \frac{1}{4}(\partial_i A_0)^2 - \frac{1}{2}\partial_i A_0\, \partial_0 A_i + A_0 J^0 \right) \tag{3}$$

که با انتگرالِ جزء‌به‌جزء می‌شود:

$$S = \int d^4x \left(\cdots + \frac{1}{4}A_0 \nabla^2 A_0 + \frac{1}{2}A_0\, \partial_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + A_0 J^0 \right) \tag{4}$$

در این‌صورت معادله‌حرکتِ A_0 می‌دهد

$$\frac{\delta S}{\delta A_0} = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = 0 \;\rightarrow\; \nabla^2 A_0 + \partial_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -J_0 \tag{5}$$

با یادآوریِ این‌که میدانِ الکتریکی به شکلِ زیر است:

$$\vec{E} = -\partial_0 \vec{A} - \vec{\nabla} A_0 \tag{6}$$

معادله‌حرکتِ A_0 چیزی به غیر از قیدِ گاوس نیست:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = J_0 \tag{7}$$

به علاوه معادله‌حرکت (5) بر حسبِ $\vec{A}$ حل می‌شود:

$$A_0(t,\vec{x}) = \int d^3x'\; \frac{J_0(t,\vec{x}') + \partial_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})(t,\vec{x}')}{4\pi\,|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{8}$$

که نشان می‌دهد A_0 مستقل نیست و برحسب $\vec{A}$ داده می‌شود. اگرچه همان‌طور که به زودی می‌بینیم رابطه‌ی بالا به این معنا نیست که A_0 به طور یک‌تا تعیین شده است، چون در واقع خودِ $\vec{A}$ به طورِ یک‌تا معلوم نمی‌شود.

نکته‌ی دیگر در مورد کنش الکترودینامیک به عدمِ امکان تعیینِ یک‌تایِ میدان‌ها با شرطِ اولیه‌ی داده‌شده برمی‌گردد. معادله‌حرکت A به شکلِ زیر می‌شود:

$$\frac{\delta S}{\delta A_\nu} = 0 \;\to\; \partial_\mu F^{\mu\nu} = \underbrace{\left(\partial_\mu \partial^\mu \, \eta^{\nu\alpha} - \partial^\nu \partial^\alpha\right)}_{D^{\nu\alpha}} A_\alpha = J^\nu \tag{9}$$

که در آن

$$\eta^{\nu\alpha} = \eta_{\nu\alpha} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{10}$$

نکته مهم این‌جاست که معادله حرکتِ بالا حل به شکلِ

$$A_\alpha = D^{-1}_{\alpha\nu} J^\nu \tag{11}$$

ندارد به این دلیل که عمل‌گرِ $D^{\nu\alpha}$ وارون ندارد. این را به راحتی از این‌جا می توان دید که این عمل‌گر ویژه‌تابع با ویژه‌مقدارِ صفر دارد

$$D^{\nu\alpha} \, \partial_\alpha \Lambda = \partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu \Lambda - \partial^\nu \partial^\alpha \partial_\alpha \Lambda = 0 \tag{12}$$

به بیانِ دیگر اگر A_α در معادله‌حرکت صدق کند آن‌گاه A'_α به شکلِ زیر نیز صدق می کند

$$A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \Lambda \tag{13}$$

در نتیجه با شرایطِ اولیه‌ی داده شده‌ی

$$A_\alpha(t_0, \vec{x}), \quad \dot{A}_\alpha(t_0, \vec{x}) \tag{14}$$

به شرطی که برایِ تابعِ $\Lambda(x)$، به منظور عوض‌نشدنِ شرایطِ اولیه، داشته باشیم

$$\Lambda(t_0, \vec{x}) = 0, \quad \dot{\Lambda}(t_0, \vec{x}) = 0 \tag{15}$$

می‌توان بی‌نهایت حل و در نتیجه بی‌نهایت تحولِ زمانی به دست آورد. در عمل برای غلبه بر این مشکل و به دست‌آوردنِ حل برایِ معادله‌حرکت تقاضا می‌شود میدانِ A_α در شرطِ انتخابی صدق کند که اصطلاحاً به آن تثبیتِ پیمانه می‌گویند. از تثبیت‌پیمانه‌های معروف به پیمانه‌ی کولن

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{16}$$

و پیمانه‌ی لورنتس

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{17}$$

می‌توان اشاره کرد. در واقع (13) به تبدیلاتِ پیمانه‌ای معروف است و به شرطی که جریان پایسته باشد ($\partial_\mu J^\mu = 0$) کنش را ناوردا می‌گذارد. به این خاصیت ناوردائیِ پیمانه‌ای یا تقارنِ پیمانه‌ای می‌گوئیم. می‌دانیم چنان‌چه تبدیلاتِ پیوسته‌ای از متغیرها کنش را عوض نکند، بنا بر قضیه‌ی نوتر، به مقادیر پایسته منجر می‌شود. مثلاً تقارن دورانی در مکانیک به پایسته‌گی تکانه‌زاویه‌ای منجر می‌شود. اما چنان‌چه تبدیلات شامل تبدیلاتِ موضعی باشند پیامدِ دیگری دارند که یک نمونه از آن را در بالا دیدیم، و آن این است که تحولِ زمانی متغیرها را، حتا با دادنِ شرایطِ اولیه، نمی‌توان تعیین کرد. در این موارد تقارن موضعی به درجاتِ آزادیِ زائد (اضافی) منجر می‌شود. مثلاً از آن‌جا که A_μ و $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ معادل هست‌اند (هر دو در معادله‌حرکت صدق می‌کنند و هر دو $\vec{E}$ و $\vec{B}$ یک‌سان

می‌دهند) پس بعضی از مولفه‌های A_μ عملاً زائدند. در واقع می‌دانیم با دو نکته‌ی گفته‌شده در بالا (یکی نقشِ A_0 و دیگری تبدیلِ پیمانه‌ای)، با این‌که میدانِ اولیه چهار مولفه دارد، موجِ الکترومغناطیسی تنها دو درجه‌ی آزادی (دو قطبش) دارد.

تا این‌جا همه چیز بر اساس کنش بود. می‌دانیم که برایِ سیستم‌ها می‌توان فرمول‌بندی همیلتونی بر اساسِ متغیرهایِ فضایِ فاز هم داشت. اولین قدم این است که تکانه‌هایِ کانونی را معرفی کنیم که در این‌جا می‌شود:

$$\pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = F_{0\mu} \tag{18}$$

که برایِ مولفه‌ی زمانی می‌دهد

$$\pi_0 = F_{00} = 0 \tag{19}$$

و برایِ مولفه‌هایِ مکانی میدانِ الکتریکی را می‌دهد

$$\pi_i = F_{0i} = -\partial_0 A_i - \partial_i A_0 = E_i \tag{20}$$

می‌بینیم که با یک قید در فضای فاز طرف هستیم که صفربودنِ تکانه‌ی متناظرِ A_0 است. بر همین اساس، همان‌طور که در فرمول‌بندیِ لاگرانژی دیدیم، این مولفه غیردینامیکی است. برای بررسی بیش‌تر در قدم بعدی همیلتونی را می‌سازیم:

$$H(t) = \int d^3x \, (\pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L}) \tag{21}$$

که با استفاده از (19) و (20) می‌شود

$$H = \int d^3x \, (\pi_i \dot{A}^i + \frac{1}{2}\pi_i \pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - J_0 A_0 + \vec{J}\cdot\vec{A}) \tag{22}$$

مانندِ همیشه سرعت‌ها را بر حسبِ تکانه می‌گذاریم:

$$\dot{A}_i = -\pi_i + \partial_i A_0 \tag{23}$$

که با جاگذاری می‌دهد

$$H = \int d^3x \, (-\frac{1}{2}\pi_i \pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - J_0 A_0 + \vec{J}\cdot\vec{A} - \partial_i A_0 \, \pi^i) \tag{24}$$

که با انجامِ جزءبه‌جزء در جمله‌ی آخر می‌توان به شکلِ زیر در آورد:

$$H = \int d^3x \, \Big(-\frac{1}{2}\pi_i \pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \vec{J}\cdot\vec{A} + A_0 \, (\partial_i \pi^i - J_0) \Big) \tag{25}$$

مطابقِ معمول با وردش معادلات‌حرکت را به دست می‌آوریم. برای سیستم‌های معمولی با وردش به شکلِ

$$\begin{aligned} \delta H = \delta(p_n \dot{q}_n - L) &= \delta p_n \dot{q}_n + \cancel{p_n \delta \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta \dot{q}_n} && (26) \\ &= \delta p_n \dot{q}_n - \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n && (27) \end{aligned}$$

در نتیجه گفته می‌شود که همیلتونی فقطِ تابعِ مختصات و تکانه‌هاست. در این صورت معادلات حرکت به شکل زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{q}_n &= \frac{\partial H}{\partial p_n} = \{q_n, H\}_{\rm PB} && (28) \\ \dot{p}_n &= -\frac{\partial H}{\partial q_n} = \{p_n, H\}_{\rm PB} && (29) \end{aligned}$$

در بالا فرض شده است که هیچ قیدی روی مختصات و تکانه‌ها نیست و در نتیجه وردش آن‌ها مستقل از هم است. در حالاتی که روی مختصات و تکانه‌ها قید است وردش‌ها در بالا نمی توانند از هم مستقل باشند. فرمول‌بندی همیلتونی در حالتی که قیدهائی روی مختصاتِ فضای فاز وجود دارد توسط دیراک انجام شده است. بر اساس ملاحظاتِ معمول برای در نظر گرفتنِ قیود در وردش‌ها، نسخه‌ی کلی می‌گوید که قیدها را با ضرایبِ نامعین به همیلتونی اضافه کنیم. مثلاً اگر مجموعه‌ی قیود زیر را داشته باشیم

$$\phi_m(q_n,p_n)=0, \qquad m=1,2,\cdots \tag{30}$$

در این‌صورت همیلتونی کل به شکل زیر را تعریف می‌کنیم

$$H_T=H+C_m\phi_m \tag{31}$$

که در آن C_m ها همان ضرایبِ نامعین هست‌اند. با اعمالِ قیود این دو همیلتونی یکی می‌شوند. در این‌صورت با اعمالِ مجددِ وردش معادلات‌حرکت به شکل زیر به دست می‌آیند

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}+C_m\frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}=\{q_n,H_T\}_{\rm PB} \tag{32}$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}-C_m\frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}=\{p_n,H_T\}_{\rm PB} \tag{33}$$

برایِ سازگاری لازم است تا قیود به معادلاتِ حرکت احترام بگذارند. در حالتی که پیچیده‌گی کم‌تری دارد می‌توان مجموعه‌ای از قیود پیدا کرد که کروشه‌پوآسونِ هر دو قید و کروشه‌پوآسون هر قید با همیلتونی اولیه صفر یا یک قید شود. در این‌صورت همه چیز سازگار است و فرمول‌بندی با همیلتونیِ کل ممکن می‌شود.

کاربردِ آن‌چه در بالا گفته شد در مسئله‌ی ما یعنی قیدِ مربوط به تکانه‌ی A_0 یعنی (19) را به همیلتونی اضافه کنیم که می‌دهد

$$H_T=\int d^3x\,\Big(-\frac{1}{2}\pi_i\pi^i+\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}+\vec{J}\cdot\vec{A}+A_0(\partial_i\pi^i-J_0)+C_1\pi_0\Big) \tag{34}$$

که برایِ معادله‌حرکتِ A_0 می‌دهد:

$$\dot{A}_0=\{A_0,H_T\}_{\rm PB}=C_1 \tag{35}$$

توجه کنیم که اگر این جمله اضافه نمی‌شد (یعنی $C_1=0$ بود) در این‌صورت داشتیم $\dot{A}_0=0$. در نتیجه A_0 حتماً باید همان مقدارِ اولیه‌اش را داشته باشد: $A_0(t,\vec{x})=A_0(t_0,\vec{x})$. این نتیجه به وضوح با (8) که از فرمول‌بندیِ لاگرانژی به دست آمده در تناقض است. پس اضافه‌کردن قیود به همیلتونی برایِ رسیدن به حالتِ کلی لازم است. جمله‌ی اضافه‌شده هیچ تغییری در معادله‌حرکتِ دیگر مولفه‌ها A_i نمی‌دهد. در نتیجه تغییرِ ناشی از تبدیلِ $C_1=0$ به $C_1\neq 0$ به شکلِ زیر است:

$$A_0(t+\delta t,\vec{x})=A_0(t,\vec{x})+C_1(t,\vec{x})\,\delta t, \qquad A_i(t+\delta t,\vec{x})=A_i(t,\vec{x}) \tag{36}$$

نکته‌ی جالب این است که تغییرِ بالا چیزی غیر از تبدیلاتِ خاصِ پیمانه‌ای نیست. به عبارتِ دیگر π_0 مولدِ تبدیلاتِ خاصِ پیمانه‌ای است.

حالا باید ببینیم آیا دینامیک مسئله به قیدی که داریم احترام می‌گذارد یا نه؟ با نوشتنِ معادله‌حرکت داریم

$$\dot{\pi}_0=\{\pi_0,H_T\}_{\rm PB}=-\partial_i\pi^i+J_0 \tag{37}$$

که برایِ سازگاری باید به عنوانِ یک قیدِ جدید صفر گذاشته شود. خوش‌بختانه با توجه به این‌که π_i ها مولفه‌هایِ میدانِ الکتریکی هست‌اند داریم:

$$-\partial_i \pi^i + J_0 = 0 \;\rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = J_0 \tag{38}$$

که همان قیدِ مطلوبِ گاوس است. با اضافه‌کردنِ این قیدِ جدید به همیلتونیِ کل داریم:

$$H_T = \int d^3x \,\Big(-\frac{1}{2}\pi_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \vec{J}\cdot\vec{A} + A_0(\partial_i\pi^i - J_0) + C_1\pi_0 + C_2(\partial_i\pi^i - J_0)\Big) \tag{39}$$

نکته‌ی جالب این‌جاست که جمله‌ی اضافه‌شده دقیقاً شبیهِ جمله‌ی شاملِ A_0 است که قبلاً در همیلتونی بوده است. در واقع همان‌طور که قبلاً در فرمول‌بندیِ لاگرانژی دیده بودیم، A_0 در نقشِ یک ضریبِ نامعین ظاهر می‌شود و می‌توان آن را در C_2 جذب کرد.

به ساده‌گی دیده می‌شود که کروشه‌پوآسونِ این دو قید خودبه‌خود صفر است. هم‌چنین کروشه‌پوآسونِ آن‌ها به طورِ خودبه‌خود با همیلتونی صفر است. برایِ مثال داریم

$$\begin{aligned}\{\partial'_k\pi^k(x') - J_0(x'), H_T\}_{\rm PB} &= \int d^3x\,\frac{1}{4}\{\partial'_k\pi^k(x'), F_{ij}(x)F^{ij}(x)\}_{\rm PB} &(40)\\ &= \int d^3x\,\frac{1}{2}\{\partial'_k\pi^k(x'), \partial_iA_j(x)\partial_iA_j(x) - \partial_iA_j(x)\partial_jA_i(x)\}_{\rm PB} = 0 &(41)\end{aligned}$$

در بالا از تعریفِ کروشه‌پوآسون به شکلِ زیر استفاده شده است:

$$\{M(t), N(t)\}_{\rm PB} = \int d^3z\,\left(\frac{\delta M(t)}{\delta A^k(z)}\frac{\delta N(t)}{\delta\pi_k(z)} - \frac{\delta M(t)}{\delta\pi_k(z)}\frac{\delta N(t)}{\delta A^k(z)}\right) \tag{42}$$

که در حالتِ خاص می‌دهد:

$$\{\pi_i(t,\vec{x}), A^j(t,\vec{y})\}_{\rm PB} = \delta_i^j\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{43}$$

در نتیجه قیدِ جدیدی به مسئله اضافه نمی‌شود. جالب اینکه این قیدِ جدید، مانندِ قبلی $\pi_0 = 0$، ربطِ نزدیکی به تبدیلاتِ پیمانه‌ای دارد. در واقع به مانندِ قبلی دیده می‌شود جمله‌ی اضافه‌شده مولدِ تبدیلاتِ پیمانه‌ای ولی این بار رویِ A_i ها است. کافی است بنویسیم:

$$\delta A_0 = \{A_0, \int d^3x\, C_2(\partial_i\pi^i - J_0)\}_{\rm PB} = 0 \tag{44}$$

$$\delta A_j = \{A_j, \int d^3x\, C_2(\partial_i\pi^i - J_0)\}_{\rm PB} = \partial_j C_2 \tag{45}$$

تا این‌جا فرمول‌بندیِ همیلتونی انجام شده است. با همیلتونیِ کلِ (39) و دو قیدِ زیر

$$\pi_0 = 0, \qquad \partial_i\pi^i - J_0 = 0 \tag{46}$$

می‌توان معادلاتِ‌حرکت را به دست آورد. چنان‌چه معادلاتِ‌حرکت را بنویسیم برایِ A_μ ها به معادله‌ی قبلی (9) می‌رسیم و جالب این‌که دو ضریبِ C_1 و C_2 نامعین می‌مانند. دلیلش هم ساده است چون همان‌طور که قبلاً دیدیم به نقشِ خاصِ A_0 و هم‌چنین تقارنِ پیمانه‌ای نظریه برمی‌گردد. در این مرحله مانندِ آن‌چه در فرمول‌بندیِ لاگرانژی انجام می‌شود باید آزادیِ پیمانه‌ای را با تثبیتِ پیمانه مهار کرد. قبل از این‌کار، مختار هستیم تا دو کمیتِ هم‌نقشِ نامعینِ A_0 و C_2 را با هم ترکیب کنیم. در این‌جا به نفعِ C_2 عمل می‌کنیم و A_0 را در آن جذب می‌کنیم. حُسنِ این کار این است که دیگر لازم نیست جمله‌ی شاملِ π_0 را هم یدک بکشیم. پس از این کار همیلتونیِ کل می‌شود:

$$H_T = \int d^3x\,\Big(\underbrace{\underbrace{-\frac{1}{2}\pi_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}}_{\frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)} + \vec{J}\cdot\vec{A}}_{H_{\rm EM}} + C_2(\partial_i\pi^i - J_0)\Big) \tag{47}$$

و قید فقط می‌شود

$$\partial_i \pi^i - J_0 = 0 \tag{48}$$

در بالا هیچ اثری از مولفه‌ی صفرِ میدان و تکانه‌اش نیست. البته می‌دانیم هم‌چنان آزادیِ پیمانه‌ای مربوط به تبدیلاتِ رویِ A_i ها را داریم. در این‌جا این به این شکل خودش را نشان می‌دهد که ضریبِ C_2 نامعین مانده است. پس اگر تحولِ زمانیِ یک تابع از متغیرهای فضای فاز بگیریم داریم

$$\dot{f}(\vec{A},\vec{\pi}) = \{f, H_T\}_{\mathrm{PB}} = \{f, H_{\mathrm{EM}}\}_{\mathrm{PB}} + \int d^3x \, C_2 \, \{f, \partial_i\pi^i\}_{\mathrm{PB}} \tag{49}$$

که دستِ راست نامعین می‌ماند مگر این که فرض کنیم کروشه‌پوآسونِ تابع با $\partial_i\pi^i$، صفر می‌شود. اما به یاد بیاوریم که $\partial_i\pi^i$ مولد تبدیل پیمانه‌ای بود. پس توابعِ فیزیکیِ یعنی توابعی که اصطلاحاً پیمانه ناوردا هست‌اند، را این‌گونه تعریف می‌کنیم که تبدیلاتِ پیمانه‌ای آن‌ها صفر باشد:

$$\{f_{\mathrm{phys}}, \partial_i\pi^i\}_{\mathrm{PB}} = 0 \tag{50}$$

در این‌صورت تحولِ زمانیِ توابعِ فیزیکی بدونِ ابهام می‌شود. در عمل هر مقدارِ فیزیکی را رویِ رویه‌ای خاص در فضای فاز تعریف می‌کنیم. در واقع با تعریف روی یک زیرفضا آزادیِ پیمانه‌ای را محدود می‌کنیم. به این کار همان‌طور که قبلاً گفته شد تثبیتِ پیمانه می‌گوئیم. فرض کنیم که رویه‌ی موردِ نظر برای تثبیتِ پیمانه با معادله‌ی زیر داده شود:

$$K\big(A^i(x), \pi_i(x)\big) = 0 \tag{51}$$

حال سوال این است آیا هر رویه‌ای موردِ قبول است؟ بدیهی است که جواب «نه» است. به طورِ شهودی انتظار داریم هنگامی پیمانه به طور مناسبی تثبیت شده باشد که در اثرِ هر تبدیلِ پیمانه‌ای دست‌کم در یک جا سطح تغییر کند. به عبارتِ دیگر تبدیلِ بین سطح و پارامترهای تبدیل وارون‌پذیر باشد. با توجه به این‌که مولدِ تبدیلِ پیمانه‌ای $\partial_i\pi^i$ است، برایِ تغییراتِ رویه به ازایِ تبدیلِ پیمانه‌ایِ کوچکِ ε داریم

$$\delta K\big(A^i(x), \pi_i(x)\big) = \int d^3y \; \mathcal{J}(x,y) \; \varepsilon(y) \tag{52}$$

که در آن ماتریسِ تبدیل به شکل زیر است:

$$\mathcal{J}(x,y) = \big\{K(A^i(x), \pi_i(x)), \partial_j\pi^j(y)\big\}_{\mathrm{PB}} \tag{53}$$

حال ناتکین بودنِ تبدیل به این معنی خواهد بود که

$$\det\big|\mathcal{J}(x,y)\big| \neq 0 \tag{54}$$

در این صورت، از آن‌جا که این ماتریس ویژه‌مقدارِ صفر و در نتیجه ویژه‌بردارِ متناظرِ آن را ندارد، به ازایِ هر $\varepsilon(y)$ ی سطح (دست‌کم در یک نقطه) عوض می‌شود. به عبارتِ دیگر به ازایِ هر تبدیلی K و $K+\delta K$ یکی نیست. این به آن معناست که سطح در همه جا میدان‌ها را تثبیت کرده است.

به عنوانِ مثال به پیمانه‌ی کولن که در (16) معرفی شد می‌پردازیم:

$$K\big(A^i(x), \pi_i(x)\big) = \partial_j A^j(x) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(x) = 0 \tag{55}$$

که برای آن داریم:

$$\mathcal{J}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y^i}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{56}$$

دترمینان ماتریسِ بالا می‌شود ضربِ ویژه‌مقدارهایِ عمل‌گرِ لاپلاسی $\nabla^2 = \partial_i\partial^i$. با شرطِ مرزی که ویژه‌تابع‌ها در بی‌نهایت به صفر بروند، عمل‌گرِ لاپلاسی ویژه‌مقدارِ صفر ندارد [1] و در نتیجه شرطِ ناتکین‌بودنِ (54) برآورده می‌شود. می‌دانیم هر میدانِ برداری را می‌توان جمعِ یک قسمتِ بدونِ چرخش و یک قسمتِ بدونِ واگرائی نوشت:

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_L + \vec{\pi}_T, \qquad \vec{A} = \vec{A}_L + \vec{A}_T \tag{57}$$

که در آن‌ها داریم

$$\vec{\nabla} \times \vec{\Diamond}_L = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{\Diamond}_T = 0 \tag{58}$$

در این صورت شرط کولن می‌شود $\vec{A}_T = 0$. با فرضِ این که چشمه نداریم ($J_0 = 0$)، با استفاده از (20) قید می‌دهد

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}_L = \nabla^2 A_0 = 0 \tag{59}$$

از آن‌جا که فرض کردیم عمل‌گرِ لاپلاس وارون دارد، پس

$$A_0 = \left(\nabla^2\right)^{-1} 0 = 0 \tag{60}$$

که با توجه به (8) و (55) و غیبتِ J_0 درست است. هم‌چنین چون مولفه‌ی L می‌تواند واگرائی داشته باشد داریم $\vec{\pi}_L = 0$. پس در پیمانه‌ی کولن فقط می‌ماند $\vec{A}_T$ و $\vec{\pi}_T$. در این‌صورت همیلتونی می‌شود:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left(\vec{B}\cdot\vec{B} + \vec{\pi}_T\cdot\vec{\pi}_T\right) \tag{61}$$

که در آن

$$B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\partial^j A_T^k \tag{62}$$

مراجع

[1] P. A. M. Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics", Belfer Graduate School of Science, New York 1964.

[2] P. Ramond, "Field Theory: A Modern Primer", 2nd Ed., Westview press, 2001

[3] Lectures by Tong, http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/six.pdf

[1] مثلاً برایِ $f = x^2 + y^2 - 2z^2$ داریم $\nabla^2 f = 0$ ولی این تابع در بی‌نهایت صفر نمی‌شود.